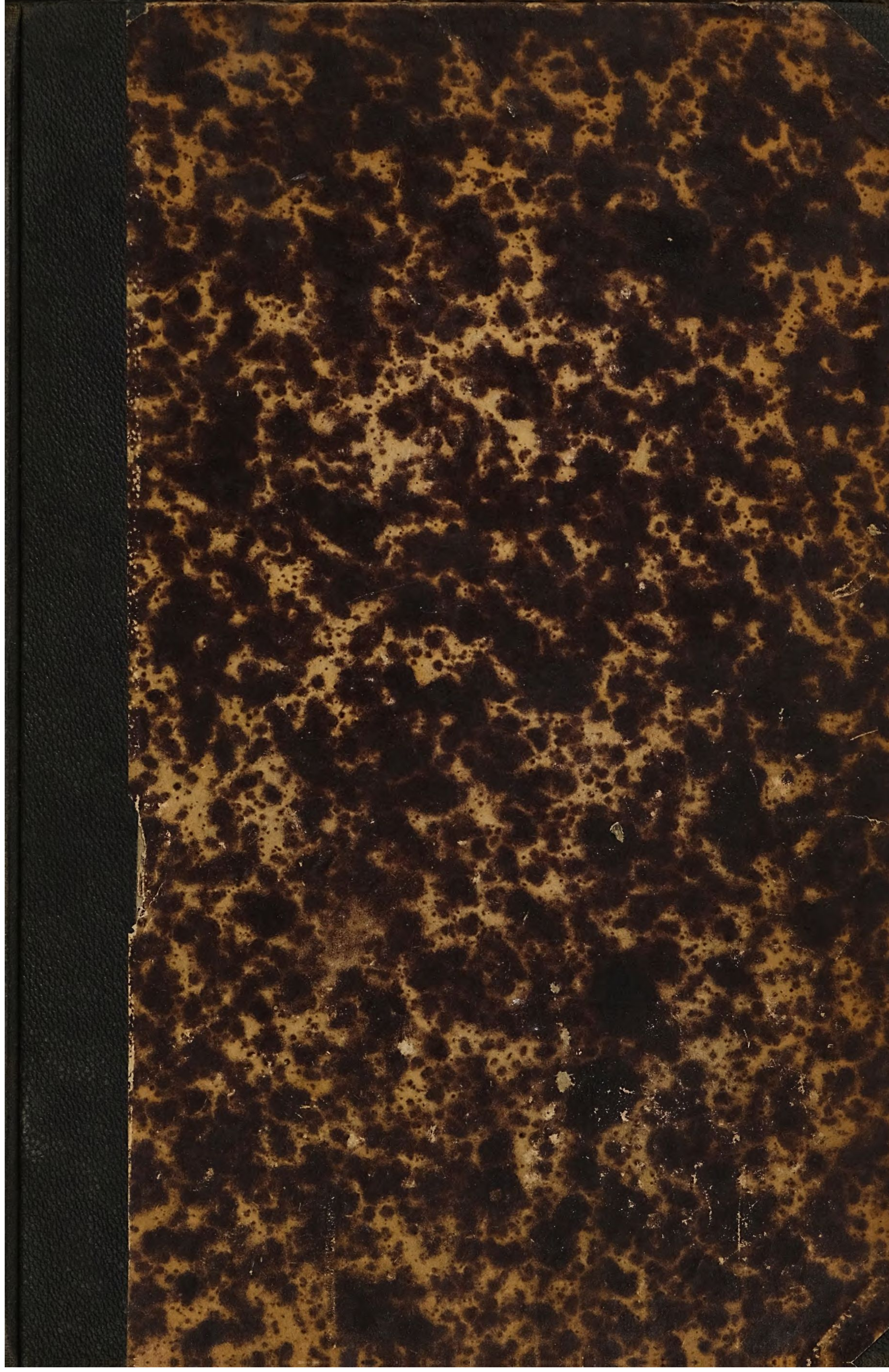




Math. P. 130 P.

Escherich

EINLEITUNG

IN DIE

ANALYTISCHE GEOMETRIE

DES RAUMES

VON

DR. GUSTAV VON ESCHERICH,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT CZERNOWITZ.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1881.

257/81

38 68

Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1880. 1881.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Drittes Heft. [276 S.] gr. 8. geh. n. *M* 6.40.

Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, latine vertit notisque illustravit I. L. HEIBERG. Vol. I. [IV u. 276 S. mit vielen Figuren im Text.] 8. geh. *M* 6.—

Vol. II. [VIII u. 486 S. mit Figuren im Text und 1 Tafel in Lichtdruck.] 8. geh. *M* 6.—

Bardey, Dr. G., arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen zweiter Ordnung, Gewerbeschulen und höhere Bürgerschulen. [VIII u. 260 S.] gr. 8. geh. n. *M* 2.—

Brockmann, F. J., Oberlehrer am königl. Gymnasium zu Cleve, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. Mit 46 Holzschnitten im Text. Zweite Auflage. [VIII u. 156 S.] gr. 8. geh. n. *M* 1.60.

Bruno, F. Faà di, Einleitung in die Theorie der binären Formen. Mit Unterstützung von Professor M. NOETHER deutsch herausgegeben von Dr. THEODOR WALTER. [VIII, 379 S. und 4 tabellarische Beilagen.] gr. 8. 1881. n. *M* 10.80.

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Mit vielen Holzschnitten im Text. [VIII u. 804 S.] gr. 8. geh. n. *M* 20.—

Doll, Dr. M., Lehrer der praktischen Geometrie am Großh. Polytechnikum zu Karlsruhe, Lehrbuch der praktischen Geometrie zum Unterricht an Baugewerkschulen und technischen Mittelschulen. Mit Figuren im Text. [IV u. 77 S.] gr. 8. geh. n. *M* 2.40.

Dronke, Dr. A., Director der Realschule I. O. zu Trier, die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise für die Prima höherer Lehranstalten. Mit Figuren im Text. [IV u. 75 S.] gr. 8. geh. n. *M* 2.—

Eddy, Dr. H. T., Professor der reinen und angewandten Mathematik an der Universität zu Cincinnati, neue Konstruktionen aus der graphischen Statik. Mit zehn Figuren im Text und sechs Tafeln. Vom Verfasser vermehrte und verbesserte deutsche Ausgabe. [IV u. 106 S.] gr. 8. geh. n. *M* 4.—

Fuhrmann, W., Oberlehrer an der Realschule auf der Burg in Königsberg i. Ostpr., Einleitung in die neuere Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen und Gymnasien. Mit 4 lithographierten Figurentafeln. [IV u. 63 S.] gr. 8. geh. n. *M* 1.60.

EINLEITUNG

IN DIE

ANALYTISCHE GEOMETRIE

DES RAUMES

VON

DR. GUSTAV VON ESCHERICH,
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT CZERNOWITZ.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1881.



Vorrede.

Das Buch, das ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, ging aus Vorlesungen über analytische Geometrie hervor, die ich an den Universitäten zu Graz und Czernowitz hielt. Es stellt sich die Aufgabe — wodurch allein schon, abgesehen vom Ausmaße des Stoffes, es sich von den berühmten Vorlesungen Hesse's und dem Lehrbuche Salmon's über diesen Gegenstand unterscheidet — den Leser innerhalb seines Rahmens mit den Grundbegriffen sowohl der analytischen als auch synthetischen Geometrie bekannt zu machen. Und dieser Vorwurf ist gewiß begründet in dem jetzigen Stande der Geometrie, welcher zu ihrem und ihrer Anwendungen tieferem Verständnisse vollkommene Vertrautheit mit den Methoden dieser beiden Disciplinen erheischt. Der einstige erbitterte Streit zwischen ihnen um den Vorrang, welcher neben einem teilweise noch ungehobenen Schatze von Wahrheiten jeder eine Fülle Methoden bescheerte, ist allgemach dem Streben nach allseitiger Verwerthung dieser Errungenschaften gewichen. Das frühere starre Postulat nach Ausschließlichkeit und Reinhaltung der Methode wird nunmehr, wie es von jeher in Frankreich und Italien der Fall war, hintangesetzt gegen die Forderung nach Auswahl der einfachsten und natürlichsten Methoden.

In diesem Sinne zerfällt das Buch in zwei Abtheilungen, von denen die erste die elementarsten Begriffe der analytischen Geometrie des Raumes entwickelt, auf Grund derer die zweite Abtheilung in enger Anschmiegung an die Methoden der sogenannten synthetischen projectivischen Geometrie die Hauptsätze der Theorie der Raumcurven der dritten und Flächen der zweiten Ordnung behandelt. Das Schlusscapitel, welches der Transformation der Coordinaten und der linearen Substitution gewidmet ist, vermittelt den Übergang von diesen Grundlagen der synthetischen Geometrie zu den algebraischen Methoden (Invarianten-Theorie), welche ich, falls das vorliegende Werk Beifall finden sollte, in umfassender Darstellung nachfolgen zu lassen gedenke.

Die Theorie der Determinanten glaubte ich bei dem jetzigen Zustande der mathematischen Wissenschaften, wo sie eine einleitende Disciplin in jeden Teil derselben geworden ist, ohne weiteres als bekannt voraussetzen zu dürfen. Den Anfänger verweise ich auf eine der vielen Darstellungen, die hierüber im Laufe des letzten Decenniums erschienen sind und unter denen ich die Handbücher von Baltzer, Günther und Mansion hervorhebe.

Literatur-Nachweise habe ich keine beigelegt, da das Buch nicht mehr als eine Einleitung zu sein beansprucht.

Czernowitz, im März 1881.

Der Verfasser.

Berichtigungen.

- S. 1 in Fig. 1 ist bei Q und dem unteren P oben, ausgelassen.
 S. 2 Z. 16 P statt P' .
 S. 8 Z. 5 diese statt dieser.
 S. 9 Z. 12 $(Y_1 Z_1)$ statt $(X_1 Z_1)$.
 S. 10 Z. 8 x zu streichen.
 S. 15 Z. 1, 2, 3 und 5 v. u. x'_n, y'_n, z'_n statt x_n, y_n, z_n .
 S. 28 Z. 2 ist nach „Axe“ einzuschalten: oder ist zweien parallel.
 S. 40 Z. 1 ist $\frac{1}{q}$ zu streichen, und Z. 4 $\frac{1}{q}$ statt q zu setzen.
 S. 56 Z. 9 v. u. § 17^b statt § 18.
 S. 61 Z. 6 Punkte statt Ebenen.
 S. 69 Z. 1 § 21^b statt § 21.
 S. 87 Z. 21 v. u. 12 statt § 12, 6.
 S. 96 Z. 21: $C + Ex - Dy$ statt $A + Fy - Ez$.
 S. 98 Z. 4: § 28^b statt § 28.
 S. 113 Z. 11: k statt m .
 S. 116 Z. 8 der zu streichen.
 S. 160 Z. 19: $+$ statt $-$; Z. 9 v. u. $(mE'_2)E_1 - (E'_1)E_2 - (E_2)E'_1 + m(E_1)E'_2$.
 S. 165 Z. 6, 12 und 13: $\sqrt{q}E$ statt E .
 S. 167 Z. 13 Büschel zu streichen; Z. 18 $E'_1 = mE_1$.
 S. 169 Z. 5 $V' \equiv pU + qV$; Z. 13 v. u. n statt 1.
 S. 179 Z. 7 v. u. (5) statt (6).
 S. 193 Z. 1 $V_1 = V_2 = V_3$.
-

Inhalts-Verzeichnis.

I. Abschnitt.

Erstes Capitel.

Einleitung.

	Seite
§ 1. Cartesisches Coordinatensystem	1
§ 2. Rechtwinkliges Coordinatensystem	4
§ 3. Projection von Geraden und Flächen	4
§ 4. Entfernung zweier Punkte, Winkel zweier Geraden und Ebenen . . .	8
§ 5. Polar-Coordinaten	12
§ 6. Übungen	14

Zweites Capitel.

Die Ebene und lineare Gleichung.

§ 7. Die Gleichung der Ebene	19
§ 8. Discussion derselben; unendliche ferne Ebene	21
§ 9. Ebene durch drei Punkte	25
§ 10. Bedingung, unter welcher sich drei Ebenen in einer Geraden schneiden	28
§ 11. vier Ebenen durch einen Punkt gehen	31
§ 12. Aufgaben über die Ebene	33
§ 13. Übungen	41

Drittes Capitel.

Der Punkt.

§ 14. Ebenen-Coordinaten und Gleichung des Punktes	45
§ 15. Discussion der Punkt-Gleichung.	47
§ 16. Bedingung, unter welcher drei Punkte in einer Geraden	53
§ 17. vier Punkte in einer Ebene liegen	56
§ 18. Abstand eines Punktes von einer Ebene	59
§ 19. Gesetz der Reciprocität	61

Viertes Capitel.

Die Gerade.

§ 20. Doppelte Darstellung der Geraden	66
§ 21. Bedeutung der Constanten in den Gleichungen der Geraden	67
§ 22. Winkel zweier Geraden	69
Winkel einer Geraden und Ebene	70
§ 23. Bedingung der Incidenz einer Geraden in eine Ebene	72

	Seite
§ 24. Aufgaben	75
1) Gerade durch zwei Punkte; Transformation der Gleichungen der Geraden aus Punct- in Ebenen-Coordinaten u. umg.	76
2) Normale von einem Punkte auf eine Ebene	76
3) Ebene von einem Punkte senkrecht auf eine Gerade	77
4) Ebene durch eine Gerade senkrecht auf eine gegebene Ebene	77
5) Ebene durch einen Punct und eine Gerade	77
6) Ebene durch zwei Punkte oder eine Gerade parallel einer gegebenen Geraden	78
7) Ebene durch einen Punct parallel zwei Geraden	79
8) Gerade durch einen Punct parallel zwei Ebenen oder einer Geraden	79
9) Gerade durch einen Punct senkrecht auf eine Gerade	80
10) Gerade senkrecht auf zwei gegebene Geraden und deren Abstand	81 82
11) Gerade, welche vier gegebene Geraden schneidet	87

Fünftes Capitel.

Linien - Coordinaten.

§ 25. Strahl- und Axen-Coordinaten	89
§ 26. Liniencomplex I. Grades	92
§ 27. Construction desselben aus fünf Strahlen	94
Spezieller Complex	95
§ 28. Congruenz zweier linearer Complexe	98
§ 29. Linienfläche	100
§ 30. Übungen. Durchmesser eines Complexes, Axe, Hauptschnitt, Parameter desselben. Mittelpunkt, Constante, Centralebene und conjugierte Congruenz	101

II. Abschnitt.

Projectivische Geometrie.

Sechstes Capitel.

Die homogenen Coordinaten.

§ 31. Punct-Coordinaten	106
§ 32. Ebenen-Coordinaten	109
§ 33. Fundamental-Tetraeder; Gleichung der Ebene und des Punctes	112
§ 34. Unendlich ferne Ebene; Parallel-Coordinatensystem	114
§ 35. Homogene Linien-Coordinaten	116
§ 36. Geometrische Bedeutung derselben	118
§ 38. 39. Wiederholung einiger Formeln des I. Abschnittes in homogenen Coordinaten	121—127

Siebentes Capitel.

Die einförmigen Grundgebilde.

§ 40. Die Grundgebilde der ersten, zweiten und dritten Stufe	128
§ 41. Geometrie der einförmigen Grundgebilde; Bedeutung des Parameters in der Gleichung einer Punctreihe und eines Ebenenbüschels	131
§ 42. Bedeutung des Parameters in der Gleichung eines Strahlenbüschels	133

	Seite
§ 43. Eindeutige Verwandtschaft zwischen einförmigen Grundgebilden . . .	135
§ 44. Ausdruck derselben durch das Doppelverhältnis.	137
§ 45. Eigenschaften des Doppelverhältnisses	139
Harmonisches Verhältnis	142
§ 46. Discussion der Verwandtschafts-Gleichung.	143
§ 47. 48. Ausgezeichnete Elemente in zwei projectivischen einförmigen Grundgebilden.	144
§ 49. Übungen	145

Achstes Capitel.

Die Erzeugnisse zweier projectivischen einförmigen Grundgebilde.

§ 50. Die Regelfläche. Gleichung der Regelschar in Punct- und Ebenen- Coordinten	153
§ 51. 52. Die zweite Regelschar	155
§ 53. Berührungsebene in einem Puncte der Regelfläche	159
Projectivische Erzeugung der Kegelschnitte; Identität.	161
der Curven der zweiten Ordnung und Classe	163
§ 54. Der Kegel der II. Ordnung.	163
Der Ebenenbüschel der II. Ordnung	166
§ 55. Perspectivische Lage der einförmigen Grundgebilde	167
§ 56. In einander liegende projectivische einförmige Grundgebilde	168
§ 57. 58. Involutorische Lage derselben; Doppelemente	170
§ 60. Übungen	170

Neuntes Capitel.

Projectivische Verwandtschaft zwischen den Grundgebilden
der zweiten Stufe.

§ 61. Eindeutige Verwandtschaft, welche durch eine	177
§ 62. welche durch zwei nach jedem Parameter zweier Grundgebilde der zweiten Stufe homogene lineare Gleichungen vermittelt wird .	182
§ 63. Collineare und reciproke Verwandtschaft zwischen zwei Grundgebilden der zweiten Stufe	187

Zehntes Capitel.

Erzeugnis projectivischer Grundgebilde der zweiten Stufe.

§ 64. Erzeugnis zweier reciproker Strahlenbündel; Fläche der II. Ordnung	191
2) Jede Fläche der II. Ordnung kann als das Erzeugnis zweier reci- proker Strahlenbündel angesehen werden.	193
§ 65. Concentrisch reciproke Strahlenbündel	194
Involutorischer Strahlenbündel; Ordnungsfläche desselben	197
§ 66. Der Ebenenbündel der II. Ordnung das Erzeugnis zweier reciproken ebenen Systeme; in einander liegende reciproke ebene Systeme; Polarsystem.	199
§ 67. Ebenes System und ein zu ihm reciproker Strahlenbündel.	199
§ 68. Erzeugnis zweier collinearer Strahlenbündel.	200
Raumcurve der III. Ordnung. Verschiedene Erzeugungsweisen derselben	204
§ 69. Degeneration der Curve der III. Ordnung.	205
3) Perspectivische Lage zweier collinearer Strahlenbündel	206
4) Doppelemente zweier concentrischer collinearer Strahlenbündel .	208

	Seite
§ 70. Erzeugnis zweier collinearer ebener Systeme. Der Ebenenbündel der III. Ordnung	210
Perspectivische Lage zweier ebener Systeme und Doppelemente zweier in einander liegender collinearer ebener Systeme	211
§ 71. Neue Darstellung der Raumcurve und des Ebenenbüschels der dritten Ordnung	211
§ 72. Identität der Raumcurve mit der Cuspidalcurve des Ebenenbüschels der dritten Ordnung.	214
§ 73. Strahlenbündel und ein zu demselben reciprokes ebenes System . . .	216
§ 74. Übungen	216

Elftes Capitel.

Collineation und Reciprocität räumlicher Systeme.

§ 75. 1) Collineare	223
2) Reciproke Verwandtschaft.	224
3) Eigenschaften derselben.	226
§ 76. Gleichungen in Punct-Coordinationen	227
§ 77. in Ebenen-Coordinationen	230
§ 78. Collineare und reciproke Curven und Flächen	233
§ 79. Das Gesetz der Reciprocität	235

Zwölftes Capitel.

Das Erzeugnis zweier projectivischer räumlicher Systeme.

§ 80. Doppelemente zweier collinearer Systeme	237
§ 81. Specielle Lagen derselben	238
§ 82. Involutorische Systeme.	242
§ 83. Perspectivische Lage collinearer Systeme	245
§ 84. Erzeugnis zweier reciproker Systeme	248
1) Der Kegel und die Curve der II. Ordnung	249
2) Die Fläche der zweiten Ordnung und der zweiten Classe	251
§ 85. Das Polarsystem; Ordnungsfläche desselben.	252
Identität der Fläche der II. Ordnung und Classe	253
Gleichung dieser Fläche in Punct- und Ebenen-Coordinationen	254
§ 86. Die polaren Eigenschaften der Fläche der II. Ordnung	255
§ 87. Mittelpunkt, Durchmesser und Axen	258
Arten der Fläche der II. Ordnung	260
§ 88. Das Nullsystem und der lineare Complex.	261

Dreizehntes Capitel.

Coordinationen-Transformation und die lineare Substitution.

§ 89. Die Coordinationen-Transformation besteht in einer linearen Substitution	265
§ 90. Transformation der Tetraeder-Coordinationen	267
§ 91. Transformation der Parallel-Coordinationen	269
§ 92. Transformation rechtwinkliger Coordinationen und orthogonale Substitution	272
§ 93. Übungen	277

I. Abschnitt.

Erstes Capitel.

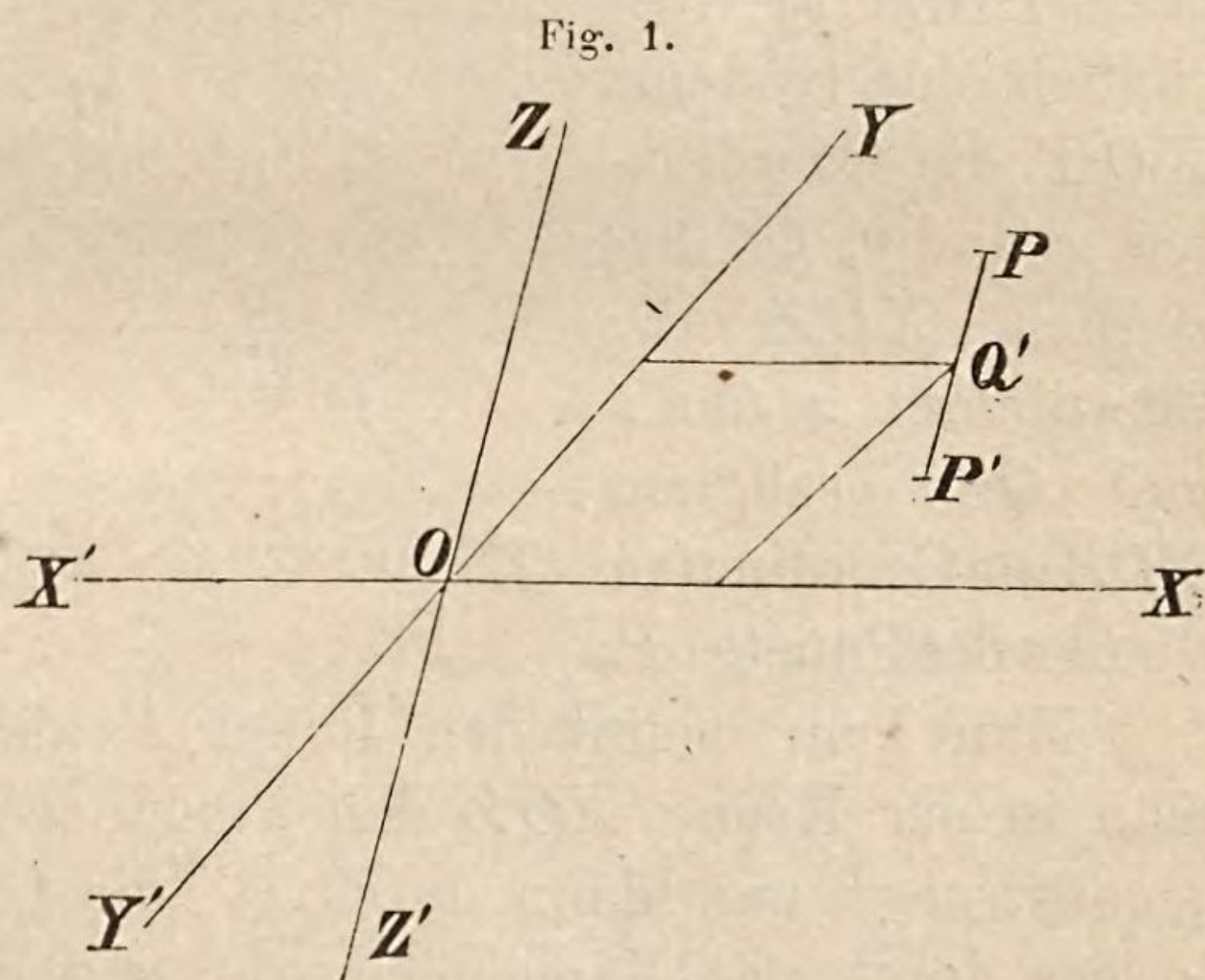
Einleitung.

§ 1.

Das Cartesische Coordinatensystem.

Wie in der analytischen Geometrie der Ebene wird auch in der des Raumes der Punct auf gewisse feste Gebilde bezogen und seine Lage, wie dort durch zwei, hier durch drei von einander unabhängige Bestimmungsstücke fixiert. Solcher Bestimmungsweisen giebt es für den Punct im Raume, ebenso wie in der Ebene, mehrere. Zu den einfachsten gehören die für viele Untersuchungen unentbehrlichen Analoga der Parallel- und Polar-Coordinaten der Ebene, weshalb zunächst diese einer näheren Erörterung unterzogen werden sollen. Hierbei wollen wir mit der ältesten Bestimmungsweise beginnen, mit der Methode der Parallel-Coordinaten, die nach ihrem Urheber Cartesius vielfach auch die Cartesianische genannt wird.

Die Puncte einer Ebene seien auf ein in ihr gelegenes Parallel-Coordinaten-system XOY bezogen und durch O außerhalb der Ebene XOY eine fixe Gerade OZ gezogen (s. Fig. 1). Jeder Punct P des Raumes ist dann zweideutig bestimmt, wenn der Durchschnittspunct Q' der Geraden $PQ' \parallel OZ$ mit der Ebene XOY durch seine Coordi-



naten x, y und die Länge $Q'P = a$ gegeben sind. Denn versucht man aus diesen Daten den Punct P zu construieren, so ergeben sich auf der durch Q' parallel OZ gezogenen Geraden zwei Puncte P und P' , für welche $Q'P$ und $Q'P'$ die gegebene Länge a aber entgegengesetzte Richtung haben. Diese Zweideutigkeit wird daher beseitigt

ist. Man findet somit den Punct, indem man durch R' eine Ebene parallel XOY , R'' eine solche parallel XOZ und R''' eine dritte parallel YOZ legt. Der Durchschnittspunct dieser drei Ebenen ist dann der gesuchte Punct.

Um daher die Puncte des Raumes zu fixieren nimmt man drei feste Gerade OX , OY , OZ , an, die sich in einem Puncte O schneiden, aber nicht in derselben Ebene liegen, und bestimmt auf jeder die eine Richtung als die positive und die entgegengesetzte als negative. Jeder Punct wird dann in der eben auseinander gesetzten Art durch drei zu den Axen parallele Abmessungen, seine Coordinaten bestimmt. Jede dieser drei fixen Geraden OX , OY , OZ wird Coordinatenaxe genannt und zwar OX die Axe der x , OY die der y , und OZ die der z ; die Ebenen XOY , XOZ und YOZ heißen Coordinatenebenen und zwar XOY die xy -, XOZ die xz - und YOZ die yz -Ebene. Zusammen bilden diese Stücke das Coordinatensystem, das speciell, weil die Coordinaten den Axen parallel laufen, Parallel-Coordinatensystem genannt wird. Der Punct O heisst der Anfangspunct oder Ursprung des Systems. Stehen die Axen des Systems senkrecht aufeinander, so nennt man das System ein rechtwinkliges.

Durch die drei Coordinatenebenen wird der Raum in acht Octanten getheilt, dergestalt, dafs für alle in demselben Octanten gelegenen Puncte die gleichbenannten Coordinaten auch gleichbezeichnete sind, so dafs die Vorzeichen der Coordinaten eines Punctes schon den Octanten angeben, in welchem der Punct gelegen ist. Sind nämlich OX , OY und OZ die positiven und OX_1 , OY_1 und OZ_1 die negativen Richtungen der Axen, so ist das Vorzeichen der

		x	y	z
für alle Puncte im Octanten	$OX\ Y\ Z$	+	+	+
	$OX\ Y_1\ Z$	+	—	+
	$OX\ Y\ Z_1$	+	+	—
	$OX\ Y_1\ Z_1$	+	—	—
	$OX_1\ Y\ Z$	—	+	+
	$OX_1\ Y\ Z_1$	—	+	—
	$OX_1\ Y_1\ Z$	—	—	+
	$OX_1\ Y_1\ Z_1$	—	—	—

Gehört ein Punct zwei Octanten an, d. h. liegt er in einer Coordinatenebene, so ist eine seiner Coordinaten offenbar 0. Für die Puncte der xy -Ebene ist $z = 0$, für die der xz -Ebene $y = 0$ und für die der yz -Ebene $x = 0$. Liegt der Punct in einer Axe, so sind zwei Coordinaten gleich Null und es hat blofs jene einen von Null verschiedenen Wert, in deren Axe er liegt, aufser er ist der Anfangspunct des Systems selbst, wo dann alle seine drei Coordinaten Null sind.

§ 2.

Das rechtwinklige Coordinatensystem.

Empfehlen nicht besondere Umstände die Wahl eines schiefwinkligen Systems, so bezieht man stets die Punkte wegen der Vereinfachungen, welche hierdurch meistens in den Rechnungen erzielt werden, auf ein rechtwinkliges System. Auch im Folgenden soll, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, ein rechtwinkliges System als zu Grunde liegend angenommen werden.

In einem solchen System steht jede Axe auf der nicht durch sie gehenden Coordinatenebene senkrecht und es sind somit die Coordinaten eines Punktes auf ihren zugehörigen Coordinatenebenen senkrecht. Sie sind also seine Abstände von denselben, und zwar ist x seine Entfernung von der yz -Ebene, y die von der xz - und z sein Abstand von der xy -Ebene.

Ist Q' die Projection des Punktes P auf die xy -, Q'' die auf die xz - und Q''' die auf die yz -Ebene, so ist die Ebene $PQ'Q''$, welche OX in R' schneide (Fig. 3), parallel der yz -Ebene und steht daher senkrecht auf OX ; ebenso ist die Ebene $PQ'Q'''$, welche OY in R'' schneide, senkrecht auf OY und die Ebene $PQ''Q'''$, welche OZ in R''' schneide, senkrecht auf OZ . Daher ist auch

$$PR' \perp OX, PR'' \perp OY, PR''' \perp OZ.$$

Da nun

$$OR' = x, OR'' = y \text{ und } OR''' = z$$

ist, so erhält man den Satz:

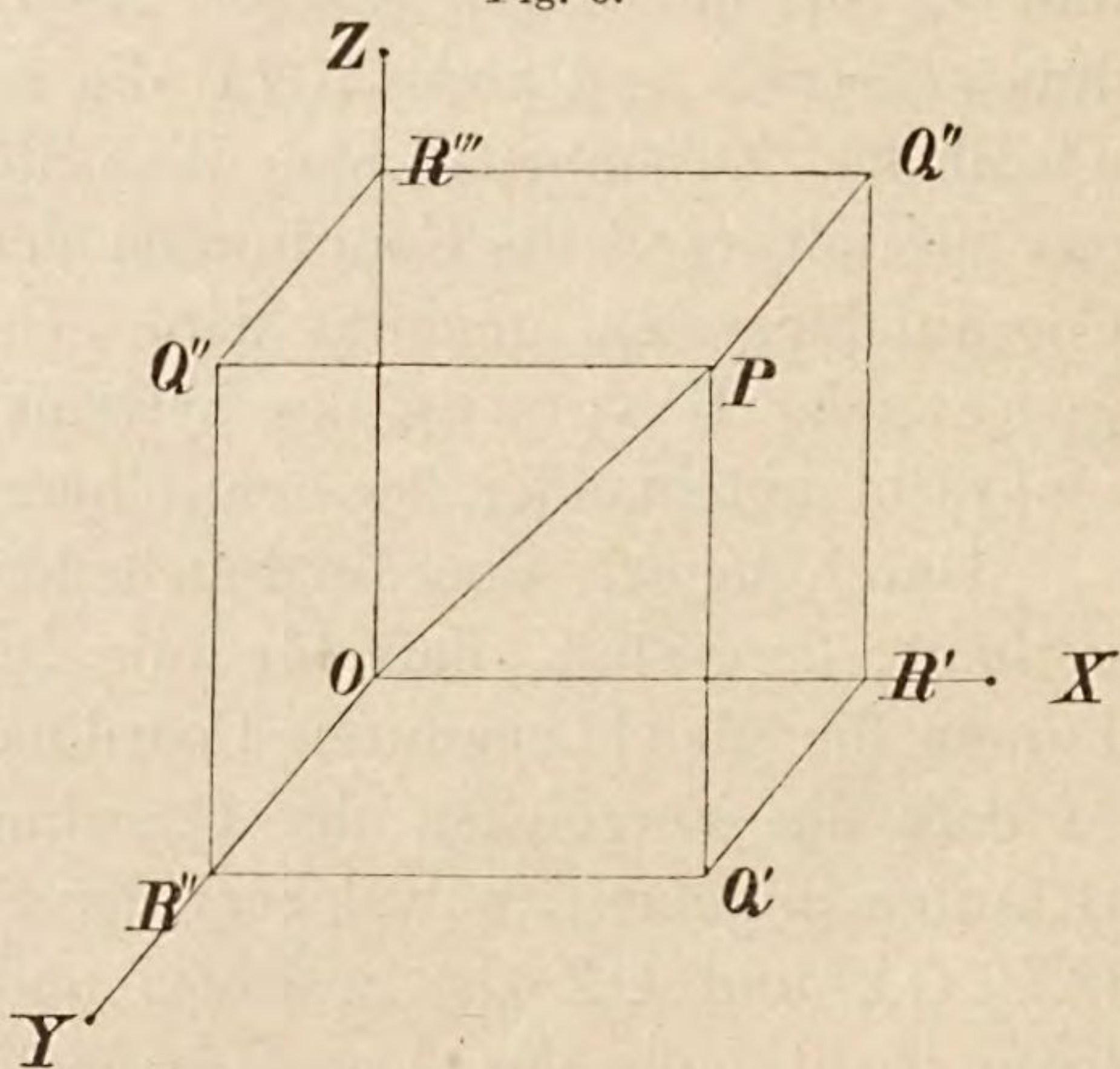
Die Senkrechte, welche von einem Punkte auf eine Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems gefällt wird, schneidet von ihr die dieser Axe parallele Coordinate des Punktes ab.

§ 3.

Projection von Geraden und Flächen.

1) Mit dem Punkte ist auch seine Entfernung vom Anfangspunkte des Coordinatensystems und sind auch die Winkel, welche die Verbindungslinie des Punktes und des Anfangspunktes mit jeder Axe bildet, bestimmt. Es müssen sich daher diese Stücke aus den

Fig. 3.



Coordinaten des Punctes berechnen lassen, welche Aufgabe wir nun lösen wollen.

Der Punct sei hierbei auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen und es seien x, y, z seine Coordinaten.

Bezeichnen wir mit r die Entfernung des Punctes P vom Anfangspuncte O , mit α, β, γ die Winkel, welche die Richtung OP bezüglich mit der positiven Richtung der X -, Y - und Z -Axe bildet*), so folgt aus dem Satze des § 2 unmittelbar

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma. \quad (1.)$$

Diese Gleichungen gelten offenbar, wenn wir darin r positiv annehmen, auch mit Rücksicht auf das Vorzeichen. Denn die bloße Anschauung lehrt, daß der Cosinus des Winkels, den die Richtung OP mit einer Axe bildet, seinem Zeichen nach immer mit der zu dieser Axe parallelen Coordinaten des Punctes P übereinstimmt.

Für r finden wir unmittelbar seinen Ausdruck durch x, y, z , wenn wir seine Projection auf irgend eine Coordinatenebene z. B. die (XY) -Ebene zu Hülfe nehmen. Bezeichnen wir diese etwa mit ϱ , so ist

$$r = \sqrt{z^2 + \varrho^2},$$

woraus sich, wenn für ϱ sein Werth $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ substituiert wird,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.)$$

ergiebt.

Mit Benutzung dieses Resultates finden wir aus (1.)

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos \beta &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.)$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist.

Quadrieren wir diese drei Formeln, so ergiebt deren Addition:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4.)$$

Die nämliche Relation findet statt, wenn α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche eine Ebene mit den drei Coordinatenebenen einschließt. Denn fallen wir vom Anfangspuncte des Coordinatensystems eine Senkrechte auf diese Ebene, so sind die Winkel, welche diese

*) Unter dem Winkel, den die Richtung OP mit der positiven z. B. X -Axe bildet, ist bekanntlich die GröÙe der Drehung zu verstehen, die OP in der Ebene OPX vollführen muß, damit auf dem kürzesten Wege die Richtung OP mit der positiven Richtung der X -Axe zusammenfalle.

Senkrechte mit den Coordinatenaxen einschließt, die Neigungswinkel der Ebene gegen die Coordinatenebene, da die Schenkel jedes dieser Winkel auf den Ebenen eines der Flächenwinkel senkrecht stehen, welche die Ebene mit den Coordinatenebenen bildet.

Die Formel (4.) zeigt, daß die Winkel α , β , γ nicht von einander unabhängig sind und daß der eine durch die beiden anderen wenigstens seiner Größe, wenn auch nicht dem Zeichen nach, bestimmt ist. Aus (4.) folgt z. B.

$$\begin{aligned}\cos \gamma^2 &= 1 - \cos \alpha^2 - \cos \beta^2 \\ &= 1 - \cos \alpha^2 - \cos \beta^2 + \cos \alpha^2 \cos \beta^2 - \cos \alpha^2 \cos \beta^2 \\ &= -(\cos \alpha^2 \cos \beta^2 - \sin \alpha^2 \sin \beta^2) \\ &= -\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta).\end{aligned}$$

Diese Formel lehrt, daß γ nur dann einen reellen Wert besitzt, wenn $\cos (\alpha + \beta)$ und $\cos (\alpha - \beta)$ ungleiche Vorzeichen haben. Ist diese Bedingung erfüllt, dann liefert sie

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{-\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)},$$

also zwei gleiche aber entgegengesetzt bezeichnete Werte für $\cos \gamma$. Die Gleichungen (1.) geben dann zwei diesen Werten zugehörige Punkte, die symmetrisch zur (XY) -Ebene liegen. Diese beiden Punkte fallen zusammen und in die (XY) -Ebene, wenn entweder $(\alpha + \beta)$ oder $(\alpha - \beta)$ gleich 90° wird.

2) Die Formel (4.) führt auch zu einem merkwürdigen Zusammenhange zwischen einem ebenen Flächenstücke und seinen Projectionen auf die drei Coordinatenebenen eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Dieser Zusammenhang ergibt sich unmittelbar, wenn das Flächenstück ein Dreieck ist, von welchem zwei Ecken in einer Coordinatenebene liegen. Es sei PQR ein derartiges Dreieck, und es mögen die beiden Ecken Q und R in der (XY) -Ebene liegen. P' sei die Projection von P auf die (XY) -Ebene.

Fällt man nun $PS \perp QR$, so ist auch $RS \perp QR$, somit ist

$$P'S = PS \cos \alpha,$$

also auch $\frac{1}{2} QR \cdot P'S = \frac{1}{2} QR \cdot PS \cos \alpha$

oder $\triangle P'QR = \triangle PQR \cos \alpha.$

Dieselbe Relation bleibt bestehen, wenn nicht mehr zwei Ecken des Dreiecks in der Coordinatenebene liegen, sondern wenn bloß die eine Seite derselben parallel ist. Denn schneidet man die Geraden PQ und PR durch eine beliebige, der QR parallele Gerade in den Punkten M und N , so ist MN auch parallel der Coordinatenebene. Daher ist auch ihre Projection $M'N'$ auf dieselbe gleich und parallel MN . Man kann somit durch $M'N'$ eine Ebene parallel MNP

legen und diese schneidet das dreiseitige senkrechte Prisma MNP $M'N'P'$ in einem Dreiecke $M'N'P''$, das dem Dreiecke MNP congruent ist. Das Dreieck $M'N'P''$ hat aber mit seiner Projection auf die Coordinatenebene: $M'N'P'$ die Seite $M'N'$ gemeinsam und daher ist nach dem Vorstehenden:

$$\triangle M'N'P'' = \triangle M'N'P' \cos \alpha,$$

wo α den Winkel bezeichnet, den die Ebene $M'N'P''$ oder, was dasselbe ist, die ihr parallele Ebene MNP mit der Coordinatenebene bildet. Da nun $\triangle M'N'P'' \cong \triangle MNP$, so erhält man

$$\triangle M'N'P' = \triangle MNP \cos \alpha.$$

Ist also eine Seite eines Dreiecks $\triangle$ parallel einer Coordinatenebene und ist α der Winkel, den die beiden Ebenen einschließen, so ist seine Projection $\triangle'$ auf diese Coordinatenebene:

$$\triangle' = \triangle \cos \alpha.$$

Hieraus folgt unmittelbar die Gültigkeit dieser Formel für jedes beliebige Dreieck. Denn zieht man in der Ebene des Dreiecks durch eine seiner Ecken eine Parallele zur Coordinatenebene (d. i. zur Durchschnittslinie der beiden Ebenen), so stellt sich das Dreieck als die Summe oder Differenz zweier Dreiecke dar, deren gemeinsame Grundlinie auf eben dieser Parallelen liegt. Seine Projection ist übereinstimmend die Summe oder Differenz der Projectionen dieser beiden Dreiecke. Wendet man daher auf jedes dieser Dreiecke die obige Formel an, so erhält man entweder durch Addition oder Subtraction der beiden Gleichungen, wenn mit $\triangle$ die Fläche des Dreiecks, mit $\triangle'$ die seiner Projection und mit α der Neigungswinkel der Dreiecksebene gegen die Coordinatenebene bezeichnet wird,

$$\triangle' = \triangle \cos \alpha. \quad (a.)$$

Hieraus folgt wieder die Gültigkeit dieser Formel für jedes beliebige in einer Ebene gelegene Flächenstück und seine Projection auf eine andere Ebene. Ist nämlich das Flächenstück ein Polygon, so kann man dasselbe in eine algebraische Summe von Dreiecken zerlegen, aus welcher man die Projection des Polygons erhält, indem man in derselben an Stelle jedes Dreiecks seine Projection setzt. Drückt man nun in dieser algebraischen Summe der Projectionen jede derselben vermöge der Formel (a.) aus, so wird dieselbe einem Producte gleich, dessen einer Factor der allen Summanden gemeinsame Cosinus des Neigungswinkels der beiden Ebenen ist, und dessen anderer Factor aus der algebraischen Summe der Projectionen hervorgeht, wenn man darin statt jeder Projection das projicierte Dreieck selbst setzt, der also das Polygon selbst ist.

Da nun jede Curve wieder als Grenze eines Polygons betrachtet werden kann, so hat man den allgemeinen Satz:

Ist das ebene Flächenstück F gegen eine Coordinatenebene unter dem Winkel α geneigt, so ist seine Projection F' auf dieser Ebene:

$$F' = F \cos \alpha.$$

Sind daher F'' und F''' die Projectionen von F auf die beiden anderen Coordinatenebenen des rechtwinkligen Coordinatensystems und β und γ bezüglich die Neigungswinkel von F gegen dieselben, so ist auch

$$F'' = F \cos \beta, \quad F''' = F \cos \gamma.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$F'^2 + F''^2 + F'''^2 = F^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma).$$

Nun ist aber $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ und man hat daher folgenden Satz:

Sind F' , F'' , F''' die Projectionen eines ebenen Flächenstückes F auf die drei Coordinatenebenen eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so ist

$$F^2 = F'^2 + F''^2 + F'''^2.$$

§ 4.

Entfernung zweier Punkte, Winkel zweier Geraden oder Ebenen.

1) Parallele Coordinaten-Verschiebung.

Um die Entfernung zweier Punkte durch ihre Coordinaten auszudrücken, dürfte es am zweckmässigsten sein, diese Aufgabe auf die schon gelöste zurückzuführen: Den Abstand eines Punktes vom Coordinatenursprung durch seine Coordinaten zu berechnen. Zu diesem Behufe wählen wir einen der beiden Punkte zum Anfangspunkte eines neuen Coordinatensystems und suchen nun die Coordinaten des zweiten Punktes bezüglich eines Systems zu bestimmen, dessen Axen wir dergestalt legen, daß sich die Coordinaten dieses Punktes bezüglich des neuen Systems aus seinen ursprünglichen leicht bestimmen lassen.

Wir werden so zur Erörterung eines speciellen Falles des allgemeinen Problems geleitet, das den Namen Coordinatentransformation führt. Dasselbe stellt die Forderung, die Relationen aufzufinden, welche die Coordinaten eines und desselben Punktes, bezogen auf zwei verschiedene Systeme, mit einander verknüpfen. Vorläufig soll hier nur der specielle Fall, daß die Axen der beiden Systeme parallel seien, behandelt werden.

Es sei $OXYZ$ das ursprüngliche System und durch den Punct O_1 , der die Coordinaten $x = a$, $y = b$, $z = c$ besitze, die Axen des

neuen Systems $O_1X_1 \parallel OX$, $O_1Y_1 \parallel OY$, $O_1Z_1 \parallel OZ$ gezogen, wo die positiven Richtungen in den parallelen Axen der beiden Systeme übereinstimmen sollen.

Die Coordinaten irgend eines Punctes P , bezüglich des ursprünglichen Systems, seien x, y, z , bezüglich des neuen x_1, y_1, z_1 . Um die Verknüpfungen zwischen denselben kennen zu lernen, betrachten wir den Durchschnitt irgend zweier Coordinatenebenen des neuen Systems z. B. der (X_1Y_1) - und (Y_1Z_1) -Ebene (also der Y_1 -Axe) mit der zur dritten Coordinatenebene des neuen Systems parallelen des ursprünglichen, also in unserem Falle der (XZ) -Ebene. Ist O_2 der Durchschnittspunct der Y_1 -Axe und sind O_2X_2 und O_2Z_2 die Durchschnittslinien bezüglich der (X_1Y_1) - und (X_1Z_1) -Ebene mit der (XZ) -Ebene, so hat der Punct P in Bezug auf das Hilfs-Coordinatensystem $O_2X_2Y_1Z_2$, in dem die positiven und negativen Richtungen der Axen mit den parallelen im ursprünglichen übereinstimmen sollen, die Coordinaten

$$x_2 = x_1; y_2 = y; z_2 = z_1.$$

Zieht man nun durch P die Gerade PQ parallel der Y -Axe, so hat Q (§ 1) bezüglich des Systems OXZ die Coordinaten x, z , und bezüglich $O_2X_2Z_2$ die Coordinaten x_2, z_2 . Da die Axen dieser beiden ebenen Coordinatensysteme übereinstimmend parallel sind und der Punct O_2 bezüglich OXZ die Coordinaten $x = a, z = c$ besitzt, so ist

$$x = a + x_2, z = c + z_2,$$

somit wegen (1.)

$$x = a + x_1, z = c + z_1.$$

Zieht man durch P noch eine Gerade parallel der X -Axe, welche die Ebene $O_2Y_1Z_2$ in Q' schneide, so hat Q' bezüglich des Systems $O_2Y_2Z_2$ die Coordinate $y_2 = y$ bezüglich des Systems $O_1Y_1Z_1$. Da nun beide Systeme parallel zu einander auf der Y_1 -Axe verschoben sind, so ist

$$y = b + y_1.$$

Die neuen und ursprünglichen Coordinaten eines jeden Punctes sind somit durch die Gleichungen mit einander verbunden:

$$x = a + x_1, y = b + y_1, z = c + z_1. \quad (1.)$$

2) Entfernung zweier Punkte.

Es hat nunmehr keine Schwierigkeit, die Entfernung zweier Punkte durch deren Coordinaten auszudrücken.

Es seien x_1, y_1, z_1 die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes P_1 und x_2, y_2, z_2 die des Punctes P_2 . Einen dieser Punkte, etwa P_1 , wählen wir nun zum Anfangspuncte eines dem ursprünglichen parallelen

Coordinatensysteme $P_1 \Xi H Z$, wo die $P_1 \Xi \parallel OX$, $P_1 H \parallel OY$ und $P_1 Z \parallel OZ$ sei. Bezeichnen nun ξ, η, ζ die Coordinaten des Punctes P_2 bezüglich dieses neuen Systems, so ist nach (1.)

$$\xi = x_2 - x_1; \eta = y_2 - y_1; \zeta = z_2 - z_1,$$

daher die Entfernung r der beiden Puncte nach (§ 3, 1)

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.)$$

Aus den Formeln (3) in § 3, 1 ergeben sich auch die Ausdrücke für die Winkel, welche die Richtung von P_1 nach P_2 mit den x -Axen des Systems $OX YZ$ bildet. Denn diese Winkel sind dieselben, welche $P_1 P_2$ mit den Axen von $P_1 \Xi H Z$ einschließt und somit, wenn α, β, γ die Winkel von $P_1 P_2$ bezüglich mit der X -, Y - und Z -Axe bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\xi}{r} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\ \cos \beta &= \frac{\eta}{r} = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{\zeta}{r} = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \end{aligned} \right\}, \quad (3.)$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist.

3) Winkel zweier Geraden.

Die vorstehenden Formeln ermöglichen es, den Winkel, den zwei Gerade im Raume mit einander bilden, durch die Winkel, welche jede derselben mit den Axen des Systems einschließt, auszudrücken. Da eine parallele Verschiebung der beiden Geraden ihre Lage nicht ändert, so werden wir ihre Parallelen durch den Coordinatenanfangspunct betrachten. Es seien α, β, γ die Winkel, welche die eine und α', β', γ' die Winkel, welche die andere bezüglich mit der X -, Y - und Z -Axe bildet. Auf der zur ersteren Parallelen durch den Anfangspunct nehmen wir einen Punct P_1 , auf der zur zweiten Parallelen einen Punct P_2 an. Ist r_1 die Entfernung OP_1 und r_2 der Abstand OP_2 , so sind die Coordinaten x_1, y_1, z_1 von P_1 und x_2, y_2, z_2 von P_2 durch die Formeln gegeben:

$$x_1 = r_1 \cos \alpha, y_1 = r_1 \cos \beta, z_1 = r_1 \cos \gamma,$$

$$x_2 = r_2 \cos \alpha, y_2 = r_2 \cos \beta, z_2 = r_2 \cos \gamma.$$

Nun ist aber nach dem Carnot'schen Satze, wenn wir mit ω den Winkel $P_1 O P_2$ bezeichnen,

$$\overline{P_1 P_2}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \omega,$$

oder, da

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

und

$$\overline{P_1 P_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

so ist

$$r_1 r_2 \cos \omega = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

also

$$\cos \omega = \frac{x_1}{r_1} \frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1} \frac{y_2}{r_2} + \frac{z_1}{r_1} \frac{z_2}{r_2},$$

$$\cos \omega = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'. \quad (5.)$$

Hieraus läßt sich durch die bekannte Relation $\sin^2 \omega = 1 - \cos^2 \omega$ auch ein Ausdruck für $\sin \omega$ ableiten. Es ist nämlich

$$\sin^2 \omega = 1 - \cos^2 \omega = 1 - (\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma')^2$$

oder wegen 4:

$$\begin{aligned} \sin^2 \omega &= (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) (\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma') \\ &\quad - (\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma')^2. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach einer sehr häufig verwendbaren Identität:

$$\begin{aligned} (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2 \\ = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \sin^2 \omega &= (\cos \alpha \cos \beta' - \cos \alpha' \cos \beta)^2 \\ &\quad + (\cos \alpha \cos \gamma' - \cos \alpha' \cos \gamma)^2 \\ &\quad + (\cos \beta \cos \gamma' - \cos \beta' \cos \gamma)^2. \end{aligned}$$

Diese Formel läßt sich auch unmittelbar leicht ableiten, indem man das Dreieck $OP_1 P_2$ durch seine Projectionen auf die Coordinatenebenen ausdrückt. Nach einer bekannten Formel ist nämlich

$$\triangle OP_1 P_2 = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin \omega.$$

Seine Projection auf die (XY) -Ebene: $\pm \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$ wandelt sich durch Substitution der Werthe von x_1, y_1, x_2, y_2 um in

$$\pm \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) = \pm \frac{1}{2} r_1 r_2 (\cos \alpha \cos \beta' - \cos \alpha' \cos \beta).$$

Analog erhält man für die Projection auf die (XZ) -Ebene:

$$\pm \frac{1}{2} (x_1 z_2 - x_2 z_1) = \pm \frac{1}{2} r_1 r_2 (\cos \alpha \cos \gamma' - \cos \alpha' \cos \gamma):$$

auf die (YZ) -Ebene:

$$\pm \frac{1}{2} (y_1 z_2 - y_2 z_1) = \pm \frac{1}{2} r_1 r_2 (\cos \beta \cos \gamma' - \cos \beta' \cos \gamma),$$

somit ist nach § 3, 2

$$\begin{aligned} \sin^2 \omega &= (\cos \alpha \cos \beta' - \cos \alpha' \cos \beta)^2 \\ &\quad + (\cos \alpha \cos \gamma' - \cos \gamma \cos \beta')^2 \\ &\quad + (\cos \beta \cos \gamma' - \cos \gamma \cos \beta')^2. \end{aligned} \quad (6.)$$

4) Neigungswinkel zweier Ebenen.

Durch die vorstehende ist auch die Aufgabe gelöst, den Neigungswinkel zweier Ebenen aus ihren Neigungswinkeln gegen die Coordi-

natenebenen zu berechnen. Denn zwei Gerade, deren jede auf einer anderen der beiden gegebenen Ebenen senkrecht steht, schliessen mit einander den Neigungswinkel der beiden Ebenen ein. Die beiden Geraden, die wir vom Ursprung des Systems senkrecht auf die beiden Ebenen fällen, bilden also mit einander den gesuchten Winkel. Die Neigung jeder dieser Geraden gegen jede der Axen ist aber durch die Neigungswinkel der Ebene nach § 3 gegeben. Sind daher α, β, γ die Neigungswinkel der ersten Ebene bezüglich gegen die (XY) -, (XZ) -, (YZ) -Ebene, α', β', γ' die analogen der zweiten, so schliesst die Senkrechte auf die erste Ebene mit den Axen (nach § 3) die Winkel α, β, γ und die zweite α', β', γ' ein. Es ist somit der Neigungswinkel der beiden Ebenen nach (5.) durch die Formel gegeben:

$$\cos \omega = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'. \quad (5')$$

§ 5.

Polarcoordinaten.

In analoger Weise wie in der Ebene mittelst Polarcoordinaten kann man auch im Raume den Punct fixieren.

Kennt man die Entfernung r des gesuchten Punktes P von einem fixen Puncte O , so liegt der gesuchte Punct auf der Kugelfläche, die aus O mit r als Radius beschrieben wird. Ist nun der in einem bestimmten Sinne gezählte Winkel ω bekannt, den die Ebene, welche durch P und eine fixe Gerade OX gelegt wird, mit einer festen, etwa OX enthaltenden, Halbebene bildet, so liegt P auf dem Kreise, in dem die Ebene die Kugel schneidet. Kennt man daher auch den Winkel ϑ , den die Gerade OP mit der Geraden OX einschliesst, so ist der Punct P eindeutig bestimmt.

Der Winkel ω kann bei dieser Bestimmungsweise, wo es sich um die Lage der Ebene OPX handelt, offenbar auf Werte zwischen 0° und 180° beschränkt werden; dann muß aber der Winkel ϑ die Lage des Halbstrahles OP bestimmen und daher alle Werte von 0° bis 360° annehmen können, sobald man für r bloß positive Werte zulässt.

Wollte man hingegen P dadurch fixiren, daß man die Halbebene OPX festlegte, in der P liegt, so müßte ω alle Werte von 0° bis 360° annehmen können, und der Spielraum des ϑ auf 0° bis 180° eingeschränkt werden.

Es ist leicht, die Beziehungen, welche zwischen den rechtwinkligen und diesen Polarcoordinaten eines Punctes bestehen, abzuleiten.

Zu diesem Behufe nehmen wir OX als die positive Seite der

X -Axe, und die fixe durch OX gelegte Halbebene als die positive Hälfte der (XY) -Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems an.

Fällt man nun auf die (XY) -Ebene die Gerade PQ und auf OX die Gerade PR senkrecht, so ist aus $\triangle OPR$:

$$OP \cos \vartheta = x; \quad OP \sin \vartheta = PR;$$

aus $\triangle PQR$:

$$PR \sin \omega = PQ; \quad PR \cos \omega = QR,$$

woraus folgt

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \\ y &= r \sin \vartheta \cos \omega \\ z &= r \sin \vartheta \sin \omega \end{aligned} \right\}. \quad (1.)$$

Umgekehrt ergibt sich hieraus:

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos \vartheta &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \tan \omega = \frac{z}{y} \end{aligned} \right\}. \quad (2.)$$

Diese Gleichungen stellen eindeutige Beziehungen zwischen den Größen x, y, z und r, ϑ, ω dar. Denn sind die letzteren gegeben, so liefern die Gleichungen (1.) für x, y, z vollkommen unzweideutige Werte. Sind hingegen x, y, z bekannt, so geben dieselben nicht allein die Gröfse von ϑ und ω , sondern auch, da entweder ϑ oder ω nur Werte zwischen 0° und 180° annimmt, die Zeichen des Sinus und Cosinus jedes dieser Winkel zu erkennen. Beachtet man nun, dafs in (1.) die rechten und linken Seiten der Gleichungen stets gleiche Zeichen besitzen, so erhellt, dafs dieselben auch dem Zeichen nach gelten.

2) Aufser dieser Art Polarcoordinaten findet öfters auch noch eine andere Anwendung. Der Punkt P (die vorige Fig.) ist offenbar auch bestimmt, wenn aufser seiner Entfernung $OP = r$, die Winkel $XOQ = \psi$ und $POQ = \varphi$ gegeben sind. Hierbei mufs wieder der eine dieser Winkel alle Werte zwischen 0° und 360° annehmen können, während man den Spielraum des anderen auf den ersten Halbkreis beschränken darf.

Die Formeln zur Verwandlung dieser Polarcoordinaten und der rechtwinkligen in einander ergeben sich auch hier sehr einfach aus der Figur; man findet

$$\left. \begin{aligned} z &= r \sin \varphi \\ y &= r \cos \varphi \sin \psi \\ x &= r \cos \varphi \cos \psi \end{aligned} \right\} \quad (3.)$$

und hieraus

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan \psi = \frac{y}{x}, \quad \sin \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (4.)$$

Auch hier gelten die früher in Betreff der Winkel ϑ und ω gemachten Bemerkungen für die Winkel φ und ψ .

§ 6.

Ü b u n g e n.

1) Ein Punct C teilt die Strecke AB im Verhältnisse von $m : n$; es sind die Parallelcoordinaten des Teilungspunctes C durch die von A und B auszudrücken.

Aufl. Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten von A ; x_2, y_2, z_2 die von B , so sind die Coordinaten x, y, z von C :

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}; \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}; \quad z = \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}.$$

Man erhält diese Relationen z. B. die letzte aus dem Trapeze, das zu seinen parallelen Seiten die Coordinaten z_1 und z_2 besitzt, in dem also z eine zu diesen Parallele durch C ist.

2) Sind A_1, A_2, A_3 drei Puncte bezüglich mit den Coordinaten $x_1y_1z_1, x_2y_2z_2, x_3y_3z_3$ und teile B die Entfernung A_1A_2 im Verhältnisse $A_1B : BA_2 = m : n$, ferner C die Strecke A_3B im Verhältnisse $A_3C : CB = p : q$, so sind die Coordinaten x, y, z des Punctes C durch die von $A_1A_2A_3$ auszudrücken.

Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln erhält man:

α) Die Geraden, welche die Mittelpuncte der gegenüberliegenden Kanten eines Tetraeders verbinden, halbieren sich in demselben Puncte.

Die x -Coordinate des Mittelpunctes der Kante $x_1y_1z_1, x_2y_2z_2$ ist $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, die jener der gegenüberliegenden Kante $x_3y_3z_3, x_4y_4z_4$: $\frac{1}{2}(x_3 + x_4)$; die x -Coordinate des Mittelpunctes der Verbindungslinie dieser beiden Puncte ist daher $\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$. Dieselben Coordinatenwerte erhält man für den Mittelpunct jeder anderen derartigen Geraden.

β) Ist $A_1A_2A_3A_4$ ein windschiefes Viereck und teilt C_1 die Strecke A_1A_2 , C_2 die Strecke A_3A_4 im Verhältnisse

$$A_1C_1 : C_1A_2 = A_3C_2 : C_2A_4 = m : n,$$

ebenso D_1 und D_2 bezüglich die Strecken A_1A_3 und A_2A_4 im Verhältnisse

$$A_1D_1 : D_1A_3 = A_2D_2 : D_2A_4 = p : q,$$

so schneiden sich die Geraden C_1C_2 und D_1D_2 .

Sind ξ_1, ξ_2, ξ_1' und ξ_2' die x -Coordinaten bezüglich von C_1, C_2, D_1 und D_2 , so findet man

$$\frac{q\xi_1 + p\xi_2}{p + q} = \frac{n\xi_1' + m\xi_2'}{m + n}.$$

Es schneiden sich also die Geraden C_1C_2 und D_1D_2 in einem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind:

$$x = \frac{m p x_4 + n p x_3 + m q x_2 + n q x_1}{(m + n)(p + q)};$$

$$y = \frac{m p y_4 + n p y_3 + m q y_2 + n q y_1}{(m + n)(p + q)};$$

$$z = \frac{m p z_4 + n p z_3 + m q z_2 + n q z_1}{(m + n)(p + q)}.$$

3) Zieht man von irgend einem Punkte R die Strecken nach n festen Punkten und legt diese Strecken, ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, derart an einander, daß der Endpunkt einer jeden jedesmal der Anfangspunkt der nächstfolgenden wird, und macht R zum Anfangspunkte der ersten, so geht die Verbindungslinie von R mit dem letzten Endpunkte durch einen festen Punkt S , welcher von dieser nach dem Punkte R zu den n^{ten} Theil abschneidet. Dieser Punkt, dessen jede Coordinate das arithmetische Mittel der gleichartigen Coordinaten aller n fixen Punkte ist, heißt die Mitte der n Punkte oder auch der Punkt der mittleren Entfernungen.

$x y z$ seien die Coordinaten des Punktes R ; $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2 \dots x_n y_n z_n$ die der n fixen Punkte $A_1, A_2 \dots A_n$; die Coordinaten der neu construierten $(n - 1)$ Punkte $A_2', A_3' \dots A_n'$ kann man auf verschiedene Weise finden. So kann man die von A_2' dadurch berechnen, daß man die Coordinaten des Mittelpunktes des Parallelogramms $R A_1 A_2 A_2'$ nach (1) auf zwei Arten, einmal durch die der Gegenecken R, A_2' und dann durch die von A_1, A_2 ausdrückt; man erhält auf diesem Wege für die x -Coordinate die Relation

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x + x_2'}{2},$$

also

$$x_2' = x_1 + x_2 - x.$$

Zu demselben Ausdrucke gelangt man auch unmittelbar durch die Formel

$$l_2 \cos \alpha = x - x_2 = x_1 - x_2',$$

wo l_2 die Strecke $R A_2$ und α den Winkel bedeutet, den diese Strecke mit der x -Axe bildet.

Auf dieselbe Weise erhält man

$$x_3' = x_2' + x_3 - x = x_1 + x_2 + x_3 - 2x$$

$$x_4' = x_3' + x_4 - x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n' = \sum_{k=1}^n x_k - (n - 1)x.$$

Der nach (1) der auf der Geraden $R A_n'$ liegende Punkt

$$\xi = \frac{x_n' + (n - 1)x}{n}$$

$$\eta = \frac{y_n' + (n - 1)y}{n}$$

$$\zeta = \frac{z_n' + (n - 1)z}{n}$$

ist also der Punct S und hat die Coordinaten

$$\xi = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k; \quad \eta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k; \quad \zeta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k;$$

ist somit unabhängig von dem Puncte R .

Zusatz. Verbindet man die Mitte von n festen Puncten mit einem derselben, so liegt auf dieser Geraden die Mitte der übrigen $(n - 1)$ fixen Puncte und zwar über die Mitte der n Puncte hinaus von ihr um $\frac{1}{n - 1}$ des Abstandes derselben vom fixen Puncte entfernt.

Sind ξ, η, ζ die Coordinaten der Mitte S der n Puncte und x_i, y_i, z_i die Coordinaten eines derselben A_i , so liegt nach (1) der Punct S_1 mit den Coordinaten

$$\xi_1 = \frac{n\xi - x_i}{n - 1}; \quad \eta_1 = \frac{n\eta - y_i}{n - 1}; \quad \zeta_1 = \frac{n\zeta - z_i}{n - 1}$$

auf der Geraden SA_i über S hinaus derart, daß

$$S_1S : SA_i = 1 : (n - 1);$$

ξ_1, η_1, ζ_1 sind aber die Coordinaten der Mitte der n festen Puncte mit Ausschluss des Punctes A_i .

Hieraus ergibt sich auch umgekehrt ein Verfahren, um aus der gegebenen Mitte eines Punctvereines von $(n - 1)$ Puncten die des um einen willkürlichen Punct vergrößerten Vereines zu construieren. Man wird die Entfernung der Mitte der $(n - 1)$ Puncte von diesem Puncte im Verhältnisse $1 : (n - 1)$ teilen: der Teilungspunct ist die gesuchte Mitte.

Aus dieser Construction fließt weiter der Satz:

Verbindet man die Mitte von je $(n - 1)$ Puncten mit dem jeweilig ausgeschiedenen n^{ten} , so schneiden sich alle diese Geraden in einem einzigen Puncte, der Mitte der n Puncte, und werden in demselben im Verhältnisse $1 : (n - 1)$ geteilt.

In diesem Satze sind als specielle Fälle die bekannten enthalten, daß sich die Schwerlinien eines Dreiecks und einer Pyramide in einem Puncte schneiden.

Als Übung wäre auch der directe Beweis derselben durch wiederholte Anwendung von 1) zu empfehlen.

4) Ist S die Mitte eines Vereines von n , S' die eines von m Puncten, so teilt die Mitte Σ aller Puncte die Gerade SS' im Verhältnisse

$$S\Sigma : \Sigma S' = m : n.$$

Anm. 1. Es ist hiermit klar, wie man vermöge dieses Satzes aus den Mitten mehrerer Punctvereine die Mitte der Gesamtheit aller Puncte construieren kann.

Anm. 2. Wendet man diese Construction in der Aufgabe 2α an,

so ergibt sich, daß jede der dortigen Geraden im Schwerpunkte des Tetraeders halbiert wird.

5) Die Summe der Quadrate der Entfernungen von n Punkten von ihrer Mitte ist gleich der Summe der Quadrate der Radienvectoren aller Punkte, weniger dem n -fachen Quadrate des Radiusvectors der Mitte.

(Man beziehe die Punkte auf ein rechtwinkliges System.)

6) Die Summe der Quadrate der Abstände irgend eines Punktes von n anderen ist gleich der Summe der Quadrate der Abstände dieser Punkte von ihrer Mitte, vermehrt um das n -fache Quadrat des Abstandes jenes Punktes von der Mitte.

7) Projiziert man irgend einen geschlossenen Zug gerader Linien auf eine Gerade, so ist die Summe dieser Projectionen der einzelnen Strecken Null.

Bezeichnen daher $l_1, l_2 \dots l_n$ die Strecken des Linienzuges und $(g, l_1), (g, l_2) \dots (g, l_n)$ die Winkel, welche die positive Richtung jeder derselben mit jener einer beliebigen Geraden g bei positiver Drehrichtung einschließen, so ist

$$l_1 \cos(g, l_1) + l_2 \cos(g, l_2) + \dots + l_n \cos(g, l_n) = 0.$$

8) Mittelst dieser Formel lassen sich die in den vorhergehenden Paragraphen für rechtwinklige Coordinatensysteme abgeleiteten Ausdrücke leicht auf schiefwinklige ausdehnen.

Dieselben ergeben sich aus der folgenden in (7.) enthaltenen Grundformel.

Projiziert man den geschlossenen Linienzug, der aus den schiefwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes und seinem Radiusvector r zusammengesetzt wird, auf eine Gerade g , so ist

$$x \cos(g, X) + y \cos(g, Y) + z \cos(g, Z) = r \cos(r, g),$$

wo also $(g, X), (g, Y), (g, Z)$ die im obigen Sinne genommenen Winkel sind, welche die Gerade g bezüglich mit der X -, Y - und Z -Axe bildet.

Läßt man g der Reihe nach mit der X -, Y -, Z -Axe und dem Radiusvector zusammenfallen, so fließen hieraus die vier Relationen:

$$r \cos(Xr) = x + y \cos(YX) + z \cos(ZX)$$

$$r \cos(Yr) = x \cos(XY) + y + z \cos(ZY)$$

$$r \cos(Zr) = x \cos(XZ) + y \cos(YZ) + z$$

$$r = x \cos(Xr) + y \cos(Yr) + z \cos(Zr),$$

welche die vier Unbekannten $r, \sphericalangle Xr, \sphericalangle Yr, \sphericalangle Zr$ enthalten. Für dieselben ergeben sich

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos(XY) + 2xz \cos(XZ) + 2yz \cos(YZ)$$

$$\cos(Xr) = \frac{x + y \cos(YX) + z \cos(ZX)}{r}$$

$$\cos(Yr) = \frac{x \cos(XY) + y + z \cos(ZY)}{r}$$

$$\cos(Zr) = \frac{x \cos(XZ) + y \cos(YZ) + z}{r}.$$

9) Mittelst dieser Formeln lässt sich nun wieder durch parallele Verschiebung des Systems die Entfernung zweier Punkte und der Winkel berechnen, den die Verbindungslinie derselben mit jeder Axe einschliesst.

10) Aus den Winkeln, welche die Axen zweier Parallel-Coordinatensysteme mit gemeinsamen Ursprung unter einander einschliessen, sind die Formeln herzuleiten, welche den Zusammenhang der Coordinaten irgend eines Punktes bezüglich beider Systeme angeben.

Es seien xyz die Coordinaten des Punktes P bezüglich des Systems $OXYZ$, und $x'y'z'$ jene bezüglich des Systems $OX'Y'Z'$, ferner r die Entfernung des Punktes vom Ursprung 0.

Projiciert man den geschlossenen Linienzug, der aus den Coordinaten x, y, z und den Radiusvector r gebildet wird, auf die X -Axe, so ist nach Übung 8

$$r \cos (X, r) = x + y \cos (YX) + z \cos (ZX);$$

die Projection des gleichfalls geschlossenen Linienzuges, der aus den Coordinaten x', y', z' und r gebildet wird, auf die nämliche Axe, ergibt hinwiederum: Übung 7

$$r \cos (X, r) = x' \cos (X'X) + y' \cos (Y'X) + z' \cos (Z'X).$$

Somit:

$$x + y \cos (YX) + z \cos (ZX) = x' \cos (X'X) + y' \cos (Y'X) + z' \cos (Z'X).$$

In analoger Weise erhält man

$$x \cos (XY) + y + z \cos (ZY) = x' \cos (YX') + y' \cos (YY') + z' \cos (YZ')$$

$$x \cos (XZ) + y \cos (YZ) + z = x' \cos (X'Z) + y' \cos (Y'Z) + z' \cos (Z'Z).$$

11) Den Inhalt einer Pyramide aus den rechtwinkligen Coordinaten ihrer Eckpunkte zu bestimmen.

Die Ableitung dieser Formel kann durch folgendes Lemma bewerkstelligt werden:

Wird ein dreiseitiger prismatischer Raum durch zwei Ebenen geschnitten, so ist der hierdurch erhaltene Körper gleich der Summe dreier Pyramiden, die eines der beiden Dreiecke zur gemeinsamen Grundfläche haben und deren Spitzen in den Ecken des andern Dreiecks liegen.

Projiciert man nun die vier Ecken der Pyramiden auf einer der Coordinatenebenen, so entstehen vier derartige prismatische Stumpfe, aus deren algebraischer Summe sich der Inhalt der Pyramide zusammensetzt. Berechnet man nun den Inhalt jeder dieser Stumpfe, so erhält man für den Inhalt der Pyramide Π , wenn die Coordinaten ihrer Ecken mit $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ und x_3, y_3, z_3 bezeichnet werden,

$$\Pi = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

12) Den Neigungswinkel zweier Geraden aus den Winkeln zu berechnen, welche dieselben mit den Axen eines schiefwinkligen Systems bilden.

Analog § 4, 3.

Zweites Capitel.

Die Ebene und die lineare Gleichung.

§ 7.

Die Gleichung der Ebene.

Es ist unmittelbar klar, daß die drei Coordinaten des Punctes einer Ebene nicht von einander unabhängig sein können. Und in der That nimmt man zwei derselben etwa x und y willkürlich an, so ist die dritte z unzweideutig bestimmt, wie die Construction derselben zeigt. Es stehen also die Coordinaten irgend eines Punctes einer Ebene in einer derartigen Abhängigkeit von einander, daß durch zwei derselben stets die dritte und zwar eindeutig bestimmt ist. Es müssen also die drei Coordinaten durch eine und nur eine einzige Gleichung mit einander verbunden sein, welche wegen der eindeutigen Bestimmbarkeit nach jeder Coordinate linear sein wird. Diese Behauptung bestätigt auch die früher gewonnene Formel für den Inhalt einer Pyramide. Denn sieht man darin den einen Punct als variabel an, während man den Inhalt constant läßt, so beschreibt derselbe eine zur Grundfläche der Pyramide parallele Ebene. Es stellt also unter diesem Gesichtspuncte die Formel den Zusammenhang der einem Puncte dieser Ebene zugehörigen Coordinaten dar. Die nämliche Thatsache erhellt auch noch in anderer Weise aus unserer Formel. Betrachtet man nämlich darin den einen Punct als beweglich und den Inhalt als variabel, so verschwindet der letztere, so oft der Punct in die Ebene der drei anderen Ecken der Pyramide zu liegen kommt, und umgekehrt, so oft der Inhalt verschwindet, fällt der Punct in diese Ebene. Es stellt also der gleich Null gesetzte Ausdruck den Zusammenhang der Coordinaten von vier Puncten einer Ebene dar und dieser Ausdruck ist linear nach den Coordinaten eines jeden der vier Puncte.

Die Gleichung der Ebene, d. i. der Zusammenhang der Coordinaten irgend eines Punctes derselben, läßt sich auch ohne Benutzung jener Formel für den Inhalt der Pyramide in einfacher und unmittelbarer Weise, wie jetzt gezeigt werden soll, herleiten.

Es gehe zunächst die Ebene nicht durch den Anfangspunct des rechtwinkligen Coordinatensystems. x, y, z seien die Coordinaten irgend eines ihrer Puncte, r sei der Radiusvector desselben und α, β, γ die Winkel, welche derselbe bezüglich mit der X -, Y - und Z -Axe bildet. Ist dann p der Abstand der Ebene vom Coordinaten-Anfangs-

puncte, bezeichnen λ , μ , ν die Winkel, welche derselbe bezüglich mit der X -, Y - und Z -Axe einschließt, ist ferner ϑ der spitze Winkel, den r und p mit einander bilden, so ist (§ 2, 1)

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma,$$

ferner

$$p = r \cos \vartheta;$$

setzt man hierin für $\cos \vartheta$ seinen Wert (§ 4, 5.)

$$\cos \vartheta = \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu,$$

so erhält man

$$p = (r \cos \alpha) \cos \lambda + (r \cos \beta) \cos \mu + (r \cos \gamma) \cos \nu$$

oder

$$p = x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu. \quad (1.)$$

Geht die Ebene durch den Coordinaten-Anfangspunct, so vereinfacht sich die Ableitung. Dann ist $\vartheta = 90^\circ$ und somit

$$\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu = 0$$

oder

$$(r \cos \alpha) \cos \lambda + (r \cos \beta) \cos \mu + (r \cos \gamma) \cos \nu = 0,$$

also

$$x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu = 0.$$

Diese Form ist in der obigen (1) enthalten und geht aus derselben hervor, wenn man darin $p = 0$ setzt, somit läßt sich die Gleichung einer jeden Ebene auf obige Form (1.) bringen.

Aber auch jeder linearen Gleichung zwischen x , y und z kann man die obige Gestalt geben, so daß jede solche Gleichung auch umgekehrt eine Ebene darstellt. Denn ist

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2.)$$

die gegebene Gleichung, so lassen sich stets fünf Größen λ , μ , ν , p und ϱ bestimmen, welche die Bedingungen erfüllen:

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1,$$

$$\varrho A = \cos \lambda, \quad \varrho B = \cos \mu, \quad \varrho C = \cos \nu, \quad \varrho D = p.$$

Aus diesen fünf Gleichungen erhält man für die fünf Unbekannten λ , μ , ν , ϱ und p die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \lambda &= \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \mu &= \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \nu &= \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ p &= \frac{-D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned} \right\}. \quad (3.)$$

Die vorgelegte Gleichung geht dann über in

$$x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu = p \quad (1.)$$

und stellt somit, sobald man der Quadratwurzel $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ jenes Zeichen beilegt, welches p positiv macht, die Gleichung einer Ebene dar, welche mit den Coordinatenebenen die Winkel λ, μ, ν einschließt (§ 3) und vom Ursprung der Coordinaten um die Länge p absteht.

Man nennt die specielle Form (1.) die Normalform der Gleichung einer Ebene.

Aus dem Vorhergehenden ist auch ersichtlich, daß die allgemeine Form (2.) der Gleichung einer Ebene durch den Factor

$$\rho = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (3.)$$

wo von den beiden Zeichen jenes zu nehmen ist, welches $\frac{-D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ positiv macht, in die Normalform übergeführt werden kann.

§ 8.

Discussion der Gleichung der Ebene.

Da eine Ebene durch ihre Gleichung vollständig bestimmt ist, so müssen sich aus derselben auch ihre Durchschnittslinien mit den Coordinatenebenen und ihre Durchschnittspunkte mit den Axen bestimmen lassen. Soll nun ein Punkt gleichzeitig in einer Ebene, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sei, und einer Coordinatenebene liegen, so müssen seine Coordinaten erstens der Gleichung der Ebene genügen und zweitens muß jene Coordinate gleich Null sein, die in dieser Coordinatenebene nicht vorkommt, da nach § 1 hierin die Bedingung besteht, daß der Punkt auch der Coordinatenebene angehöre. Es liegen somit die Punkte, deren Coordinaten dem Gleichungssystem genügen:

$$x = 0$$

$$By + Cz + D = 0$$

in der Durchschnittslinie der Ebene mit der (YZ)-Ebene, die Punkte

$$y = 0$$

$$Ax + Cz + D = 0$$

in der Durchschnittslinie derselben mit der (XZ)-Ebene und die Punkte

$$z = 0$$

$$Ax + By + D = 0$$

in der Durchschnittslinie der Ebene mit der (XY) -Ebene. Die zweite Gleichung jedes dieser Systeme stellt dann die betreffende Durchschnittslinie dar, bezogen auf das ebene Coordinatensystem, das mit ihr in derselben Coordinatenebene liegt.

Die Durchschnittspunkte der Ebene mit den Axen könnte man nunmehr in der aus der analytischen Geometrie der Ebene bekannten Weise aus diesen Gleichungen der Durchschnittslinien auffinden; man erhält sie aber auch direct — eigentlich, indem man die beiden Schritte auf einmal thut — aus der Gleichung der Ebene vermöge der charakteristischen Eigenschaft der in einer Axe liegenden Punkte.

Für die Punkte einer Axe sind nämlich die Coordinaten nach den beiden anderen Axen Null. Da wir somit stets zwei Coordinaten des Durchschnittspunktes der Ebene mit einer Axe kennen, so liefert uns ihre Gleichung die gesuchte dritte, wenn wir darin die Werte der beiden bekannten substituieren. So erhält man für den Durchschnittspunkt mit der

$$X\text{-Axe: } x = -\frac{D}{A}$$

$$Y\text{-Axe: } y = -\frac{D}{B}$$

$$Z\text{-Axe: } z = -\frac{D}{C}.$$

Diese Coordinaten sind die Abschnitte, welche die Ebene auf den drei Axen bildet und sie gestatten, der Gleichung der Ebene eine neue Form zu geben. Bezeichnet man nämlich mit a, b, c die Abschnitte, welche die Ebene bezüglich auf der X -, Y - und Z -Axe bildet, so erhält man durch Einführung dieser Werte aus der Gleichung der Ebene:

die Form

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$

$D:A \quad D:B \quad D:C$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Man kann von dieser wieder zur Normalform gelangen, indem man darin a, b, c durch den Abstand p der Ebene vom Coordinaten-Anfangspunkte und durch die Winkel λ, μ, ν , welche derselbe bezüglich mit der X -, Y - und Z -Axe bildet, ausdrückt. Es ist nämlich, auch dem Zeichen nach: $p = a \cos \lambda = b \cos \mu = c \cos \nu$.

2) Es sollen nunmehr nach x, y und z lineare Gleichungen betrachtet werden, in denen Glieder fehlen.

Ist zunächst das letzte Glied $D = 0$, so wird der Gleichung der Ebene durch das Wertsystem $x = 0, y = 0, z = 0$ genügt und es ist somit der Ursprung ein Punkt der Ebene. Umgekehrt: geht eine

Ebene durch den Coordinaten-Anfangspunct, so muß $D = 0$ sein, da ihre Gleichung für $x = 0, y = 0, z = 0$ erfüllt sein muß.

Ist in der Gleichung der Coefficient irgend einer Coordinate Null, so stellt jeder Wert dieser Coordinate mit irgend welchem die Gleichung befriedigenden Wertepaare der beiden anderen Coordinaten einen Punct der Ebene dar. Diese Wertepaare selbst gehören aber, nach dem Vorhergehenden, den Durchschnittspuncten der Ebene mit der Ebene dieser Coordinaten an. Zieht man also in irgend einem Puncte dieser Durchschnittslinie der beiden Ebenen eine Parallele zur dritten Axe, so ist jeder Punkt dieser Parallelen ein Punct der Ebene, somit liegt dieselbe ganz in der Ebene. Es ist daher die Ebene dieser Axe parallel.

Dasselbe ergibt sich auch, wenn man die Durchschnittslinie der Ebene mit einer der beiden Coordinatenebenen sucht, deren Coordinaten in der Gleichung der Ebene vorkommen. Man findet, daß dieselbe der Axe, in welcher sich diese beiden Coordinatenebenen schneiden, parallel ist. Das Gleiche kann man auch aus dem Unendlichwerden eines der drei Abschnitte a, b, c schließen. Ist z. B. $A = 0$, also

$$By + Cz + D = 0$$

die Gleichung der Ebene, so stellt dieselbe in der (YZ) -Ebene, bezogen auf das Coordinatensystem OYZ , die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen dar. Ist nun yz ein Punct dieser Geraden, so gehört dieses Wertepaar in Verbindung mit jedem beliebigen x einem Puncte der Ebene an, da diese drei Coordinatenwerte der Gleichung der Ebene genügen. Man erhält aber den betreffenden Punct der Ebene, indem man durch den Punct yz der Geraden eine Parallele zur dritten Axe zieht und darauf von ihm aus das zugehörige x aufträgt. Da nun jedes x einen Punct der Ebene darstellt, so liegt also die ganze Parallele in dieser Ebene.

Sucht man den Durchschnitt der Ebene z. B. mit der (XY) -Ebene, so erhält man als Gleichung dieser Geraden, bezogen auf das Coordinatensystem OXY :

$$y = -\frac{D}{B},$$

somit ist diese Durchschnittslinie der X -Axe parallel. Dasselbe folgt auch aus $a = \infty$, da hiernach die Ebene die X -Axe im unendlich fernen Puncte schneidet.

Ist D und der Coefficient einer Coordinate in der Gleichung Null, so muß die Ebene durch den Coordinaten-Anfangspunct gehen und der dieser Coordinate zugehörigen Axe parallel sein; die Ebene geht somit durch diese Axe. So enthält z. B. die Ebene $By + Cz = 0$ die X -Axe.

Sind die Coefficienten irgend zweier Coordinaten Null, so ist die Ebene jeder Axe, die diesen Coordinaten zugehört und somit der Ebene derselben parallel. So ist z. B. die Ebene

$$Ax + D = 0$$

der (YZ) -Ebene und zwar im Abstände $x = -\frac{D}{A} = a$ parallel.

Sind endlich die Coefficienten aller drei Coordinaten Null, hat also die Gleichung der Ebene die Form

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + D = 0,$$

so schneidet sie jede Axe in ihrem unendlich fernen Punkte.

Läßt man diese Gleichung, welcher nicht durch lauter endliche Werte der x, y, z genügt werden kann, als Gleichung einer Ebene gelten, so erscheint dieselbe als der geometrische Ort der unendlich fernen Punkte aller Geraden des Raumes. Man kann sich dies folgendermaßen klar machen.

Da alle Punkte dieser Ebene unendlich fern sind, so folgt aus der in der analytischen Geometrie der Ebene gemachten Annahme, daß jede Gerade nur einen einzigen unendlich fernen Punkt besitzt, daß jede Gleichung von der obigen Form — mag das D welche Werte immer annehmen — eine und dieselbe Ebene darstellt, nämlich jene, welche durch die unendlich fernen Punkte der drei Axen bestimmt wird. In weiterer Consequenz muß man auch umgekehrt diese Ebene als den Träger aller unendlich fernen Punkte des Raumes betrachten. Denn da mindestens eine Coordinate eines solchen Punktes unendlich groß ist, so tritt durch die Substitution dieser Coordinatenwerte in die obige Form der unbestimmte Ausdruck $0 \cdot \infty$ auf, dem man also stets einen Wert beilegen kann, durch welchen der Gleichung genügt wird. Somit liegt der unendlich ferne Punkt jeder Geraden in dieser Ebene. Dies ergibt sich auch noch in der folgenden Weise. Da alle parallelen Geraden sich in ihrem unendlich fernen Punkte schneiden, so genügt es, die Behauptung für Gerade, die durch den Coordinaten-Anfangspunkt gehen, zu erweisen. Sind nun α, β, γ die Winkel, welche eine Gerade bezüglich mit der X -, Y - und Z -Axe bildet, ferner x, y, z die Coordinaten eines ihrer Punkte und ρ dessen Abstand vom Coordinaten-Anfangspunkte, so bestehen die Relationen (§ 3, 1)

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \cos \beta, \quad z = \rho \cos \gamma.$$

Will man nun das ρ für den Durchschnittspunkt der Geraden mit einer Ebene finden, so hat man offenbar nur diese Ausdrücke in die Gleichung der Ebene zu substituieren und daraus den Wert des ρ zu berechnen. Für den Durchschnittspunkt der in Rede stehenden Ebene ergibt sich auf diese Weise

$$\varrho (0 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \cos \beta + 0 \cdot \cos \gamma) + D = 0$$

oder

$$0 \cdot \varrho + D = 0,$$

woraus $\varrho = \infty$ folgt. *h. m. 6. 7. : $0 \cdot \varrho = -D$, $0 \cdot \infty = \frac{-D}{0}$.*

Diese Bemerkungen beantworten eine weitere wichtige Frage in Betreff der unendlich fernen Ebene. Die Gleichung einer gegebenen Ebene ist offenbar abhängig von dem zu Grunde gelegten Coordinatensysteme, und die Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ wird für zwei verschiedene Coordinatensysteme auch zwei verschiedene Ebenen im Allgemeinen darstellen. Ist nun $A = B = C = 0$, d. h. die Ebene die unendlich ferne, so fallen beide Ebenen zusammen; denn nach dem Vorhergehenden liegen die unendlich fernen Punkte aller Geraden und somit auch die der Axen beider Systeme in einer und derselben Ebene, und diese ist bezüglich jedes der Coordinatensysteme die unendlich ferne Ebene.

Es ist somit die unendlich ferne Ebene unabhängig von der Wahl des Coordinatensystems.

§ 9.

Fortsetzung.

1) Da die Gleichung der Ebene drei von einander unabhängige Constanten, die Verhältnisse dreier der Größen A, B, C, D zu derselben vierten, enthält, so wird dieselbe durch jede Annahme festgelegt, welche zur Bestimmung dieser Constanten drei von einander unabhängige Gleichungen liefert. Also z. B. durch drei Punkte, die nicht in derselben Geraden liegen.

Es seien $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ die Coordinaten der drei gegebenen und x, y, z bezeichnen die Coordinaten eines vierten Punktes der gesuchten Ebene. Dann müssen die vier Gleichungen zusammen bestehen:

$$\left. \begin{aligned} ux + vy + wz + 1 &= 0 \\ ux_1 + vy_1 + wz_1 + 1 &= 0 \\ ux_2 + vy_2 + wz_2 + 1 &= 0 \\ ux_3 + vy_3 + wz_3 + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.)$$

wenn mit u, v, w die unbekannten Verhältnisse $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$ der Constanten der gesuchten Ebene bezeichnet werden. Diese vier Gleichungen können aber nach bekannten Sätzen nur dann zusammen bestehen, wenn ihre Determinante verschwindet, wenn also

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.)$$

Diese Relation giebt aber den Zusammenhang an, in dem die Coordinaten x, y, z irgend eines Punctes der Ebene stehen, ist also die Gleichung der gesuchten Ebene.

Entwickelt man diese Determinante nach den Elementen ihrer ersten Zeile, so erhält man die Gleichung der Ebene in der allgemeinen Form:

$$x \begin{vmatrix} y_1, z_1, 1 \\ y_2, z_2, 1 \\ y_3, z_3, 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_1, z_1, 1 \\ x_2, z_2, 1 \\ x_3, z_3, 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \\ x_3, y_3, 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1, y_1, z_1 \\ x_2, y_2, z_2 \\ x_3, y_3, z_3 \end{vmatrix} = 0$$

und es ist somit

$$\left. \begin{aligned} u &= - \begin{vmatrix} y_1, z_1, 1 \\ y_2, z_2, 1 \\ y_3, z_3, 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1, y_1, z_1 \\ x_2, y_2, z_2 \\ x_3, y_3, z_3 \end{vmatrix}; \quad v = \begin{vmatrix} x_1, z_1, 1 \\ x_2, z_2, 1 \\ x_3, z_3, 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1, y_1, z_1 \\ x_2, y_2, z_2 \\ x_3, y_3, z_3 \end{vmatrix} \\ w &= - \begin{vmatrix} x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \\ x_3, y_3, 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1, y_1, z_1 \\ x_2, y_2, z_2 \\ x_3, y_3, z_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} (3.)$$

welche Werte man auch unmittelbar aus den drei letzten Gleichungen des Systems hätte berechnen können. Diese Formeln lehren, daß u, v, w unendlich werden, wenn die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_1, y_1, z_1 \\ x_2, y_2, z_2 \\ x_3, y_3, z_3 \end{vmatrix}$$

allein verschwindet, d. h. die Ebene geht dann durch den Coordinaten-Anfangspunct. Dies findet nicht mehr statt, wenn außer D noch der Zähler eines der Ausdrücke u, v, w in (3.) verschwindet, welchen Fall wir nun näher erörtern wollen.

Bezeichnen wir mit X, Y, Z die Zähler bezüglich von $-u, v, -w$, setzen wir also

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} y_2 - y_1, z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1, z_3 - z_1 \end{vmatrix}, & Y &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1, z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1, z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \\ Z &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1, y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1, y_3 - y_1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

so ist

$$D = x_1 X - y_1 Y + z_1 Z = x_2 X - y_2 Y + z_2 Z = x_3 X - y_3 Y + z_3 Z.$$

Verschwindet nun außer D noch eine der Größen X, Y, Z , etwa X , so bestehen zwischen Y und Z die drei Gleichungen

$$y_1 Y = z_1 Z; \quad y_2 Y = z_2 Z; \quad y_3 Y = z_3 Z;$$

diese können aber nur zusammen bestehen, wenn entweder $Y = Z = 0$ oder

$$\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_2}{z_2} = \frac{y_3}{z_3} = \text{const.}$$

ist. Im letzteren Falle verschwinden aber sowohl X als D identisch.

Wir sehen somit: Verschwindet auſser D noch eine der Determinanten X, Y, Z , so verschwinden entweder diese beiden identisch oder die vier Determinanten D, X, Y, Z verschwinden gleichzeitig.

Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir annehmen, daſs irgend zwei der Determinanten X, Y, Z verschwinden. Denn verschwinden sie nicht identisch, so zeigt der Wert des Verhältnisses ihrer beiden gemeinsamen Elementenpaare, daſs auch die dritte Determinante und somit auch D verschwindet; verschwinden sie aber dadurch identisch, daſs ihre beiden gemeinsamen Elementenpaare verschwinden, so wird keine der anderen beiden Determinanten Null. Und umgekehrt: Verschwinden zwei der drei Determinanten X, Y, Z identisch, ohne daſs D und die vierte Determinante verschwindet, so müssen, wie der Ausdruck für D zeigt, ihre beiden gemeinsamen Elementenpaare verschwinden.

Wir können diese Ergebnisse in den Satz zusammenfassen:

Verschwinden von den vier Determinanten D, X, Y, Z zwei, so verschwinden sie entweder allein identisch, oder es verschwinden gleichzeitig alle vier.

Die geometrische Interpretation dieser beiden Fälle bietet keine Schwierigkeit.

Sind, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, die beiden verschwindenden Determinanten D und X und verschwinden sie erstens allein identisch, so ist die Gleichung der gesuchten Ebene:

$$Yy - Zz = 0$$

und dieselbe enthält somit die X -Axe (§ 8).

Verschwinden sie aber nicht identisch, so liegen die drei Punkte $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ und x_3, y_3, z_3 offenbar in den beiden Ebenen

$$\begin{vmatrix} y, & z, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \\ y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Denn für $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ gehen diese beiden Determinanten bezüglich in X und D über, welche gemäß der Voraussetzung verschwinden, und durch $x = x_2, y = y_2, z = z_2$ oder $x = x_3, y = y_3, z = z_3$ wird ebenfalls den beiden Gleichungen genügt, da in jeder der beiden Determinanten hierdurch zwei Zeilen einander gleich werden. Somit liegen in diesem Falle die drei Punkte $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ in einer Geraden.

Wir erhalten somit: Verschwinden von den Determinan-

ten D, X, Y, Z zwei, so geht entweder die Ebene der drei Punkte $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ durch eine Axe, wenn nämlich allein diese beiden Determinanten identisch verschwinden — oder die drei Punkte liegen in einer Geraden.

§ 10.

Fortsetzung.

Unterliegt die Ebene blos der Bedingung durch zwei Punkte $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ zu gehen; so lassen sich die drei Größen u, v, w nicht mehr bestimmen, sondern es können nur zwei derselben durch die dritte, die willkürlich bleibt, ausgedrückt werden. Nimmt man die Gleichung

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

wo u, v, w noch zu bestimmende Größen sind, als Gleichung der gesuchten Ebene an, so müssen die u, v, w auch die beiden Gleichungen

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + 1 = 0$$

$$ux_2 + vy_2 + wz_2 + 1 = 0$$

befriedigen. In der Gleichung der gesuchten Ebene lassen wir von den drei Größen u, v, w etwa das w willkürlich und betrachten also die u und v als die zu berechnenden Unbekannten. Nun können die drei Gleichungen nur dann zusammen bestehen, wenn ihre Determinante verschwindet; also ist die Gleichung einer Ebene, welche durch die beiden gegebenen Punkte hindurchgeht:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & wz + 1 \\ x_1, & y_1, & wz_1 + 1 \\ x_2, & y_2, & wz_2 + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

wo das w entsprechend der Unbestimmtheit der Aufgabe eine willkürliche GröÙe ist und jeder Wert des w somit die Gleichung einer Ebene liefert, welche die gestellten Bedingungen erfüllt.

Diese Determinante läßt sich aber bekanntermaßen in eine Summe zerlegen, und somit läßt sich die Gleichung jeder Ebene, welche durch die beiden Punkte hindurchgeht, in der Form darstellen:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} + w \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Aber auch umgekehrt, jede Ebene, deren Gleichung auf diese Form gebracht werden kann, muß durch die beiden Punkte $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ hindurchgehen. Denn die Substitution der Coordinaten irgend eines der beiden Punkte an Stelle des x, y, z befriedigt die Gleichung, da hierdurch jede der beiden Determinanten für sich

verschwindet. Läßt man daher in dieser Gleichung w alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhält man die Gesammtheit aller Ebenen, deren jede durch die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte hindurchgeht. Für $w = 0$ liefert die Gleichung die Ebene

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

welche also nach (§ 8, 2) durch die Verbindungslinie der beiden Punkte senkrecht auf die (XY) -Ebene gelegt wird; für $w = \infty$ die Ebene

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

welche durch den Coordinaten-Anfangspunkt und die beiden Punkte hindurchgeht. Addiert man also die linken Seiten der Gleichungen dieser beiden Ebenen, jede mit einem constanten Factor multipliciert, zu einander, so stellt dieser Ausdruck, gleich Null gesetzt, eine Ebene dar, welche durch die Verbindungslinie der beiden Punkte hindurchgeht.

Es ist aber leicht einzusehen, daß nicht nur die linken Seiten dieser beiden speciellen Ebenen in dieser Verbindung den linken Teil der Gleichung einer Ebene darstellen, welche durch die Verbindungslinie der beiden Punkte hindurchgeht, sondern auch die linken Seiten irgend zweier Ebenen, welche in dieser Geraden sich schneiden. Denn bezeichnet E_1 den Ausdruck, der gleich Null gesetzt, eine Ebene darstellt — die linke Seite der Gleichung dieser Ebene —, E_2 die linke Seite der Gleichung einer zweiten Ebene und sind λ_1 und λ_2 irgend zwei constante reelle Factoren, so stellt

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = 0$$

wieder eine Ebene dar, da diese Gleichung nach den Coordinaten linear ist, und dieselbe geht durch die Schnittlinie der beiden Ebenen E_1 und E_2 hindurch.

Zum Beweise dieser Behauptung ist nur zu zeigen, daß für irgend einen Punkt der Schnittlinie von E_1 und E_2 der Ausdruck $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2$ verschwindet. Dies trifft aber zu, indem für die Coordinaten eines solchen Punktes sowohl E_1 als auch E_2 verschwindet, da der Punkt in jeder der beiden Ebenen $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ liegt.

Wir haben so den für die folgenden Untersuchungen wichtigen Satz erhalten:

Wenn $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen

und λ_1, λ_2 constante Größen sind, so geht die Ebene, deren Gleichung

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = 0$$

ist, durch die Schnittlinie der beiden Ebenen hindurch.

Dieser Satz läßt sich auch umkehren:

Sind $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen, so lassen sich für jede Ebene, welche durch ihre Schnittlinie hindurchgeht, zwei Constante auffinden, derart, daß ihre Gleichung in der Form

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = 0$$

dargestellt werden kann.

Behufs des Beweises haben wir bloß zu zeigen, daß sich in dem Ausdruck $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2$ die Größen λ_1 und λ_2 derart bestimmen lassen, daß die Ebene $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = 0$ mit der gegebenen $E = 0$ zusammenfällt. Da die Ebene $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = 0$, ebenso wie $E = 0$, durch die Schnittlinie von $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ hindurchgeht, so fallen beide Ebenen zusammen, wenn wir λ_1 und λ_2 so wählen, daß die Ebene $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = 0$ noch durch einen weiteren, willkürlich anzunehmenden Punkt der Ebene $E = 0$ hindurchgeht. Bezeichnet man mit (E_1) und (E_2) das Resultat der Substitution der Coordinaten des angenommenen Punktes bezüglich in E_1 und E_2 , so ist der gesuchte Wert von λ_1 und λ_2 gegeben durch

$$\lambda_1 (E_1) + \lambda_2 (E_2) = 0$$

oder

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = - \frac{(E_2)}{(E_1)}.$$

Es läßt sich somit E in der Form darstellen

$$(E_2) E_1 - (E_1) E_2 = 0.$$

Den beiden Sätzen kann man auch die folgende Fassung geben:

Wenn zwischen den Gleichungen dreier Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ vermöge dreier constanten Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Identität obwaltet:

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 \equiv 0,$$

so schneiden sich die drei Ebenen in einer Geraden.

Und umgekehrt: Schneiden sich drei Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ in einer Geraden, so lassen sich stets drei Constanten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ derart bestimmen, daß die Identität besteht:

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 \equiv 0.$$

Denn hiermit wird nur behauptet, daß in diesen beiden Fällen E_3

sich in der Form: $-\frac{\lambda_1}{\lambda_3} E_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} E_2$, daß also die Gleichung der Ebene $E_3 = 0$ sich in der Form $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = 0$ darstellen lasse. Was im Vorhergehenden bewiesen wurde.

§ 11.

Fortsetzung.

Soll eine Ebene durch nur einen gegebenen Punct x_1, y_1, z_1 gehen, so sind die u, v, w an die Bedingung geknüpft

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + 1 = 0,$$

und vermöge dieser Gleichung läßt sich aus der angenommenen Gleichung der gesuchten Ebene

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

eine der Größen u, v, w eliminieren, während die beiden anderen willkürlich bleiben. Eliminiert man etwa u , so erhält man aus der Bedingung des Zusammenbestehens der beiden Gleichungen als Gleichung der Ebene

$$\begin{vmatrix} x, & vy + wz + 1 \\ x_1, & vy_1 + wz_1 + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

welche Determinante sich in die Summe dreier zerlegen läßt. Die Gleichung der Ebene nimmt hierdurch die Form an

$$v \begin{vmatrix} x, & y \\ x_1, & y_1 \end{vmatrix} + w \begin{vmatrix} x, & z \\ x_1, & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x, & 1 \\ x_1, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Offenbar geht auch umgekehrt jede Ebene, deren Gleichung auf diese Form gebracht werden kann, durch den gegebenen Punct, da die Substitution der Coordinaten des Punctes an Stelle der x, y, z jede Determinante zu Null macht. Läßt man daher v und w alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhält man die Gesamtheit aller Ebenen, deren jede durch den Punct x, y, z hindurchgeht. Hieraus folgt, daß die Coefficienten von v, w und das dritte Glied der Gleichung Null gesetzt, Ebenen darstellen, deren jede durch den gegebenen Punct hindurchgeht, da diese Gleichungen aus der obigen für bestimmte Werte von v und w sich ergeben. Diese Ebenen haben ganz specielle Lagen gegen das Coordinatensystem; es ist aber leicht einzusehen, daß dieselbe Verbindung der linken Seiten der Gleichung irgend dreier Ebenen, welche durch den gegebenen Punct hindurchgehen, ohne sich in einer Geraden zu schneiden, gleich Null gesetzt, eine vierte derartige Ebene darstellt, wie es der nachfolgende Satz ausspricht.

Sind $E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = 0$ die Gleichungen dreier

Ebenen, die sich in einem Punkte schneiden, so geht jede vierte Ebene, deren Gleichung

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = 0$$

aus ihren linken Teilen vermittelt der Constanten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zusammengesetzt wird, ebenfalls durch den Punct.

Denn die linke Seite der Gleichung: $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3$ verschwindet für die Coordinaten des Durchschnittspunctes der drei Ebenen $E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = 0$, da für diese sowohl E_1 als E_2 als E_3 verschwinden; somit gehört der Durchschnittspunct auch der Ebene $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = 0$ an.

Dieser Satz läßt sich auch umkehren:

Geht eine Ebene durch den Durchschnittspunct der drei Ebenen $E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = 0$, so lassen sich stets drei constante Größen k_1, k_2, k_3 von der Art bestimmen, daß ihre Gleichung die Form:

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_3 E_3 = 0$$

annimmt.

Denn die Gleichung $k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_3 E_3 = 0$, in der die k_1, k_2, k_3 erst zu bestimmende Größen seien, stellt nach dem Vorhergehenden eine Ebene dar, welche durch den Durchschnittspunct der drei Ebenen $E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = 0$ hindurchgeht. Nun kann man den Constanten k_1, k_2, k_3 derartige Werte zuerteilen, daß diese Ebene gleichzeitig durch irgend zwei angenommene Punkte der gegebenen Ebene hindurchgeht. Man hat zu diesem Zwecke offenbar die k_1, k_2, k_3 nur der Bedingung zu unterwerfen, daß der Gleichung der Ebene durch die Coordinaten jedes der beiden gegebenen Punkte genügt wird. Bezeichnet man also das Resultat der Substitution der Coordinaten des einen Punctes in E_1, E_2, E_3 bezüglich mit $(E_1), (E_2), (E_3)$, das jenes des anderen mit $[E_1], [E_2], [E_3]$, so müssen die k_1, k_2, k_3 die Gleichungen befriedigen

$$(E_1)k_1 + (E_2)k_2 + (E_3)k_3 = 0$$

$$[E_1]k_1 + [E_2]k_2 + [E_3]k_3 = 0.$$

Diese geben in Verbindung mit

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_3 E_3 = 0$$

als Gleichung der gesuchten Ebene

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ (E_1) & (E_2) & (E_3) \\ [E_1] & [E_2] & [E_3] \end{vmatrix} = 0,$$

also eine Gleichung von der bezeichneten Form, wie die Entwicklung dieser Determinante nach den Elementen der ersten Zeilen lehrt.

Wir können diese beiden Sätze auch in der folgenden Fassung aussprechen, die manchmal eine unmittelbare Anwendung gestattet:

Wenn zwischen den linken Teilen der Gleichungen $E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = 0, E_4 = 0$ von vier Ebenen vermittelt der Constanten k_1, k_2, k_3, k_4 die Identität stattfindet

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_3 E_3 + k_4 E_4 \equiv 0,$$

so schneiden sich diese vier Ebenen in einem Punkte.

Und umgekehrt:

Wenn $E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = 0, E_4 = 0$ die Gleichungen von vier Ebenen sind, welche sich in einem Punkte schneiden, so lassen sich stets vier Constante k_1, k_2, k_3, k_4 der Art bestimmen, daß die Identität obwaltet

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_3 E_3 + k_4 E_4 \equiv 0.$$

Denn diese Sätze behaupten nur, daß in den angegebenen Fällen die linke Seite der Gleichung der Ebene $E_4 = 0$ von der Form $-\frac{k_1}{k_4} E_1 - \frac{k_2}{k_4} E_2 - \frac{k_3}{k_4} E_3$, also ihre Gleichung

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_3 E_3 = 0$$

ist.

§ 12.

Aufgaben über die Ebene.

1) Bedingung, daß zwei Ebenen parallel sind.

Aus der Normalform der Ebene kann man unmittelbar die Form der Gleichung der zu einer gegebenen parallelen Ebene ableiten. Denn die Coefficienten der x, y, z in der Normalform der Ebene bedeuten die Cosinusse der Winkel, welche die Ebene mit den Coordinatenebenen bildet, und müssen daher in den Gleichungen der beiden Ebenen einander gleich sein. Nun geht aber die allgemeine Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

in die Normalform durch Multiplication mit der allgemeinen Wurzelgröße $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ über; soll daher diese Ebene mit der Ebene

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

parallel sein, so muß

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}; \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}; \\ \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

woraus folgt

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{A'^2 + B'^2 + C'^2}}. \quad (1.)$$

Da nun die letzte Gleichheit eine Consequenz der beiden vorhergehenden Gleichungen ist, so kann man die Bedingung für die Parallelität der beiden Ebenen durch folgenden Satz ausdrücken:

Zwei Ebenen sind parallel, wenn ihre Gleichungen sich dergestalt transformieren lassen, daß sie sich blos in ihrem letzten, freien Gliede unterscheiden. Und umgekehrt.

Dasselbe Resultat erhält man durch Benutzung der Gleichung der unendlich fernen Ebene. Denn da parallele Ebenen sich in der unendlich fernen Ebene schneiden, so muß nach dem Vorhergehenden (§ 10) die linke Seite der einen mittelst constanter Factoren aus der linken Seite der andern und der unendlich fernen Ebene sich zusammensetzen lassen. Ist etwa

$$E = Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung der einen Ebene, so hat, da

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + \delta = 0$$

die Gleichung der unendlich fernen Ebene ist, die Gleichung einer zu ihr parallelen Ebene die Form

$$E + \lambda (0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + \delta) = 0,$$

wo λ eine willkürliche constante Gröfse bedeutet. $\lambda \cdot \delta$ und daher auch $D + \lambda \cdot \delta$ ist hierin eine willkürliche Gröfse; bezeichnet man dieselbe kurz mit L , so ergibt sich als die Form der Gleichung der parallelen Ebene

$$Ax + By + Cz + L = 0,$$

in Uebereinstimmung mit unserer früheren Behauptung.

2) Gleichung einer Ebene, die durch einen gegebenen Punct geht und zu einer gegebenen Ebene parallel ist.

Es seien x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des gegebenen Punctes und

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung der gegebenen Ebene.

Die parallele Ebene hat dann nach dem Voranstehenden die Form

$$Ax + By + Cz + L = 0,$$

wo die unbestimmte Gröfse L der Bedingung gemäß bestimmt werden muß, daß die Ebene durch den Punkt x_1, y_1, z_1 gehe. Diese Bedingung liefert zur Berechnung des L die Gleichung

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + L = 0,$$

somit ist $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ (2.)

die Gleichung der gesuchten Ebene.

3) Den Winkel zu berechnen, den zwei durch ihre Gleichungen gegebenen Ebenen miteinander einschließen.

Wir fanden (§ 7, 3), daß die Winkel α , β , γ , welche die Normale vom Koordinaten-Anfangspunkte auf die Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

bezüglich mit der X-, Y- und Z-Axe bilden, durch die Formel gegeben werden

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

wo für die allgemeine Wurzelgröße $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ jenes Vorzeichen zu nehmen ist, für welches $\frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ positiv wird.

Die analogen Winkel α' , β' , γ' , welche die Normale auf eine zweite Ebene:

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

mit den Axen bildet, sind wieder durch die Ausdrücke gegeben:

$$\cos \alpha' = \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

$$\cos \beta' = \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

$$\cos \gamma' = \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

wo das Zeichen der Wurzel in der angegebenen Weise genommen wird. Somit ist der Winkel ϑ , den diese beiden Normalen bilden, und also der gesuchte Neigungswinkel der beiden Ebenen, nach (§ 4, 3) durch den Ausdruck bestimmt:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' \\ &= \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt: Die beiden Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn zwischen ihren Constanten die Relation besteht:

$$AA' + BB' + CC' = 0, \quad (3.)$$

da dann $\cos \vartheta = 0$ sein muß.

Sollen die beiden Ebenen parallel sein, so muß $\vartheta = 0$ sein, und somit

$$(AA' + BB' + CC')^2 = (A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)$$

oder

$$(AB' - A'B)^2 + (AC' - A'C)^2 + (BC' - B'C)^2 = 0.$$

Die Summe dieser drei positiven Grössen kann aber nur dann Null geben, wenn jede derselben Null ist, d. h. wenn

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

was wieder die schon früher gefundene Bedingung für die Parallelität zweier Ebenen liefert.

4) Gleichung einer Ebene, die durch zwei gegebene Punkte geht und auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht.

Es seien $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ die Coordinaten der gegebenen Punkte und

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung der gegebenen Ebene.

Ist

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

die Gleichung der gesuchten Ebene, so erhält man aus den zu erfüllenden Bedingungen zur Bestimmung der drei unbekannten Grössen A', B', C' die drei Gleichungen

$$A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 + D' = 0$$

$$A'x_2 + B'y_2 + C'z_2 + D' = 0$$

$$A'A + B'B + C'C = 0.$$

Aus diesen vier Gleichungen, die nur dann zusammen bestehen können, wenn ihre Determinante verschwindet, ergibt sich somit als Gleichung der gesuchten Ebene:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ A, & B, & C, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

5) Abstand eines Punctes von einer Ebene.

Diese Aufgabe werden wir mittelst des schon bekannten Ausdruckes für den Abstand einer Ebene vom Coordinaten-Anfangspuncte zu lösen suchen, indem wir den gegebenen Punct zum Anfangspuncte eines neuen dem ursprünglichen parallelen Systems wählen und die Gleichung der Ebene bezüglich dieses Systems aufstellen.

Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des gegebenen Punctes, so hängen die Coordinaten x, y, z des alten mit denen des neuen Systems ξ, η, ζ durch die Formeln zusammen

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta.$$

Die Gleichung der gegebenen Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

transformirt sich durch diese Ausdrücke in die Gleichung der Ebene bezüglich des neuen Systems:

$$A\xi + B\eta + C\zeta + (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) = 0.$$

Hieraus erhalten wir den absoluten Wert des Abstandes Δ der Ebene vom Anfangspuncte des neuen Systems, indem wir das in der Gleichung der Ebene von den laufenden Coordinaten ξ, η, ζ negative freie Glied durch $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ dividieren und der Wurzel jenes Zeichen beilegen, durch welches dieser Quotient positiv wird. Also stellt

$$\Delta = - \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

den absoluten Abstand des gegebenen Punctes von der gegebenen Ebene dar.

Somit: Der absolute Wert des Abstandes eines Punctes von einer Ebene wird erhalten, indem man in dem negativen linken Teile ihrer Gleichung die Coordinaten des Punctes an Stelle der laufenden substituiert und diesen Ausdruck mit jener Quadratwurzel aus der Summe der zweiten Potenzen der Coefficienten der Coordinaten in der Gleichung der Ebene dividirt, welche diesen Quotienten positiv macht.

Der obige Ausdruck für Δ wird nur dann Null, wenn der Punct x_1, y_1, z_1 in die gegebene Ebene fällt. Legen wir daher der Wurzelgröße in Δ ein bestimmtes festes Zeichen bei, so kann Δ bei Änderung des x, y, z nur dann sein Zeichen wechseln und ändert es immer dann, wenn der Punct von der einen Seite der Ebene auf die andere übergeht. Es hat somit unter dieser Voraussetzung Δ für alle Puncte, die auf der einen Seite der Ebene liegen, einen positiven, für alle auf der anderen Seite derselben einen negativen Wert. Wählen wir das fixe Zeichen der Wurzel z. B. derart, daß $\frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ positiv wird, also dieser Ausdruck dem positiven Werte des Abstandes des Coordinaten-Anfangspunctes von der Ebene gleich ist, so liefert Δ für alle Puncte des Raumes, die mit dem Anfangspuncte auf derselben Seite der Ebene liegen, die positiven, für alle Puncte auf der anderen Seite derselben die negativen Werte ihrer Abstände von dieser Ebene.

Ist die Gleichung der Ebene in der Normalform gegeben

$$E \equiv x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu - p,$$

so ist

$$\Delta = \pm (x_1 \cos \lambda + y_1 \cos \mu + z_1 \cos \nu - p).$$

Um den positiven Wert p des Abstandes der Ebene vom Coordinaten-Anfangspuncte zu erhalten, haben wir also dann von dem Zeichen $\pm$ das untere zu wählen; es stellt somit für jeden Punct des Raumes x_1, y_1, z_1 , welcher mit dem Coordinaten-Anfangspuncte auf derselben Seite der Ebene liegt,

$$\Delta = - (x_1 \cos \lambda + y_1 \cos \mu + z_1 \cos \nu - p),$$

und für jeden Punct x_1, y_1, z_1 , welcher auf der dem Anfangspuncte entgegengesetzten Seite der Ebene liegt,

$$\Delta = + (x_1 \cos \lambda + y_1 \cos \mu + z_1 \cos \nu - p)$$

seinen positiven Abstand von der Ebene dar.

Versehen wir nun auch die Abstände der Puncte von einer Ebene mit Vorzeichen und setzen wir fest, daß der Abstand eines Punctes positiv oder negativ zu zählen sei, je nachdem derselbe mit dem Coordinaten-Anfangspuncte auf derselben oder entgegengesetzten Seite der Ebene liegt, so können wir die obigen Formeln in folgenden Satz zusammenfassen:

Ist die Gleichung einer Ebene in der Normalform gegeben, so liefert die Substitution der Coordinaten eines Punctes in ihre linke Seite den negativen senkrechten Abstand desselben von der Ebene.

6) Die Gleichung der Ebene aufzustellen, deren jeder Punct die Eigenschaft hat, daß seine Abstände von zwei gegebenen Ebenen in einem constanten Verhältnisse stehen.

Bezeichnen x, y, z die Coordinaten irgend eines Punctes der gesuchten Ebene und $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ die Gleichungen der Ebenen in der Normalform, so giebt die Substitution von x, y, z in E_1 den negativen Abstand $-a_1$ des Punctes von der Ebene $E_1 = 0$ und die Substitution in E_2 den negativen Abstand $-a_2$ desselben von der Ebene $E_2 = 0$. Da nun das Verhältniß $\frac{a_1}{a_2}$ für alle Puncte constant m sein soll, so hängen die Coordinaten jedes Punctes der gesuchten Ebene durch die Relation zusammen

$$\frac{E_1}{E_2} = m,$$

also ist

$$E_1 - m E_2 = 0 \quad (1.)$$

die Gleichung der gesuchten Ebene.

Sind die Gleichungen der Ebene nicht in der Normalform gegeben, sondern etwa

$E_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1$; $E_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2$,
so ist nach (5.)

$$a_1 = \frac{-E_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}; \quad a_2 = \frac{-E_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

wenn wir jeder der beiden Wurzelgrößen $\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}$ und $\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}$ jenes Zeichen beilegen, für welches bezüglich

$$\frac{-D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \quad \text{und} \quad \frac{-D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

positiv wird, und somit

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{E_1}{E_2} \sqrt{\frac{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = m.$$

Bezeichnet man diese Wurzelgröße kurz mit $\frac{1}{\varrho}$, so ist

$$E_1 - m \varrho E_2 = 0 \quad (1')$$

die Gleichung der gesuchten Ebene.

Diese Ebene E_3 geht, wie ihre Gleichung lehrt, durch die Schnittlinie der Ebenen $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ und teilt deren Neigungswinkel derart, daß

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \pm \frac{a_1}{a_2} = \pm m \quad (2.)$$

ist, wo α und β die Winkel bezeichnen, welche die Ebene E_3 bezüglich mit der Ebene E_1 und E_2 bildet, und das Zeichen zu nehmen ist, welches $\frac{a_1}{a_2}$ positiv macht. Wir überzeugen uns hiervon, wenn wir a_1 und a_2 durch die Entfernung des zugehörigen Punctes von der Schnittlinie ($E_1 E_2$) ausdrücken.

Aus der Lösung dieser Aufgabe ergibt sich auch die Bedeutung des Parameters, der in der Gleichung einer Ebene, welche durch die Schnittlinie zweier anderen hindurchgeht, die linken Teile der Gleichungen der letzteren zu ihrer linken Seite verbindet.

Sind nämlich $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen und

$$E_3 \equiv \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = 0$$

die Gleichung einer dritten Ebene, welche durch die Schnittlinie der beiden vorhergehenden hindurchgeht, so ist

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = - \frac{E_2}{E_1}.$$

Nun ist aber, wenn wir die Gleichungen der beiden ersten Ebenen in der Normalform voraussetzen, E_1 der negative Abstand $-a_1$ des beliebigen Punctes x, y, z der Ebene $E_3 = 0$ von der Ebene $E_1 = 0$ und E_2 der negative Abstand $-a_2$ desselben Punctes von der Ebene $E_2 = 0$, somit

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = - \frac{1}{\varrho} \frac{a_2}{a_1}. \quad (3.)$$

Bezeichnen hingegen $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ die allgemeinen Gleichungen, so ist

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = - \varrho \frac{a_2}{a_1}, \quad (3'.)$$

wo ϱ die früher angegebene Bedeutung hat. Der positive Wert des Verhältnisses $\frac{a_2}{a_1}$ läßt sich aber, wie schon oben bemerkt wurde (2.) durch das Verhältnis der Sinusse der Neigungswinkel der Ebene E_3 bezüglich mit E_2 und E_1 ersetzen. Um aber auch das Zeichen dieses Verhältnisses $\frac{a_2}{a_1}$ in seinen Ausdruck durch das Verhältnis der Sinusse der beiden Neigungswinkel hinein zu beziehen, ohne stets dasselbe berücksichtigen zu müssen, wird es nötig sein, die Neigungswinkel der Ebenen nach einem bestimmten Princip selbst mit Zeichen zu belegen. Dasselbe wird offenbar nur eine Uebertragung des Zählungsmodus der ebenen Winkel sein, da die Flächenwinkel der Ebenen durch ebene Winkel gemessen werden.

Jede von zwei nicht parallelen Ebenen wird durch ihre Schnittlinie in zwei unendliche Hälften geteilt. In jeder Ebene wollen wir die eine Hälfte als die positive und die andere als die negative Hälfte bezeichnen; welche wir als die positive und welche wir als die negative betrachten wollen, steht ganz in unserem Belieben. Wir wollen nun festsetzen, daß jene Hälften der beiden Ebenen zu den positiven genommen werden sollen, in deren Flächenwinkel der Coordinaten-Anfangspunct liegt. Unter dem Winkel (12) der beiden Ebenen E_1 und E_2 soll nun die Gröfse der Drehung verstanden werden, welche die positive Hälfte von E_1 vollführen muß, um auf dem kürzesten Wege mit der positiven Hälfte von E_2 zusammen zu fallen.

Geht nun durch die Schnittlinie ($E_1 E_2$) von E_1 und E_2 eine dritte Ebene E_3 , und sind a_1 und a_2 wie vorher die mit ihren zugehörigen Vorzeichen versehenen Perpendikel von einem Puncte der E_3 bezüglich auf E_1 und E_2 , sind ferner α und β die absoluten Werte der Neigungswinkel, welche E_3 bezüglich mit E_1 und E_2 bildet, so ist der absolute Wert des Verhältnisses

$$\text{abs } \frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta};$$

drücken wir nun α und β bezüglich durch (13) und (32) aus, so ergibt sich

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin (13)}{\sin (32)}.$$

Somit ist in $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = 0$:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = - \frac{\sin(13)}{\sin(32)},$$

wenn E_1 und E_2 in der Normalform vorausgesetzt werden; oder

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = - \varrho \frac{\sin(13)}{\sin(32)},$$

wo ϱ die frühere Bedeutung pag. 39 hat.

Nennen wir nun das Verhältniß $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin(13)}{\sin(32)}$, das hiernach für alle Punkte der Ebene E_3 constant ist, kurz das Abstands-Verhältniß der Ebene E_3 von den Ebenen E_1 und E_2 , so können wir diese Ergebnisse in folgenden Satz zusammenfassen:

Geht eine Ebene durch die Schnittlinie zweier anderen Ebenen, so ist das Verhältniß der Parameter, welche die linken Teile der Gleichungen der beiden Ebenen zur linken Seite ihrer Gleichung verbinden, gleich dem Abstands-Verhältnisse dieser Ebene von den beiden anderen.

Es ist somit die Gleichung der Ebene, welche den Flächenwinkel halbiert, innerhalb dessen der Coordinaten-Anfangspunct liegt, wenn wir die Gleichungen dieser Ebenen $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ in der Normalform voraussetzen:

$$E_1 - E_2 = 0,$$

und die Gleichung der den Nebenwinkel halbierenden Ebene

$$E_1 + E_2 = 0.$$

§ 13.

Übungen.

1) Die Halbierungsebenen der Flächenwinkel eines Dreikants schneiden sich in einer Geraden.

2) Die Ebenen, welche zwei äußere derselben Seite eines Dreikants anliegende Flächenwinkel und den dieser Seite gegenüberliegenden inneren Flächenwinkel halbieren, schneiden sich in einer Geraden.

3) Welche Sätze sind in den Gleichungen enthalten:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 + E_3 &= 0 \\ -E_1 + E_2 + E_3 &= 0 \\ E_1 - E_2 + E_3 &= 0 \\ E_1 + E_2 - E_3 &= 0, \end{aligned}$$

wo $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ die Gleichungen dreier Ebenen sind?

Anl. Wir wollen annehmen, daß $E_1 - E_2 = 0$, $E_1 - E_3 = 0$, $E_2 - E_3 = 0$ die Gleichungen der Halbierungsebenen der inneren, also $E_1 + E_2 = 0$, $E_1 + E_3 = 0$

$E_2 + E_3 = 0$ jene der äußeren Flächenwinkel des durch die drei Ebenen bestimmten Dreikants seien. Die Ebene $E_1 + E_2 + E_3 = 0$ geht (§ 9, 2) also durch die Schnittlinie der Ebenen 1) $E_1 = 0$ und $E_2 + E_3 = 0$; 2) $E_2 = 0$ und $E_1 + E_3 = 0$; 3) $E_3 = 0$ und $E_1 + E_2 = 0$, woraus der Satz folgt:

Die Durchschnittslinien der die äußeren Flächenwinkel eines Dreikants halbierenden Ebenen mit den gegenüberliegenden Seiten desselben liegen in einer Ebene.

Ähnliche Sätze ergeben die anderen drei Gleichungen.

4) Die drei Ebenen, welche durch eine Kante und die Halbierungslinie des gegenüberliegenden Kantenwinkels eines Dreikants gelegt werden, schneiden sich in einer Geraden.

Anl. Es seien $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ die Gleichungen in der Normalform der drei Ebenen des Dreikants. Die seitenhalbierende Ebene, welche durch die Kante der Ebenen $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ hindurchgeht, wird eine Gleichung von der Form $E_1 + \lambda E_2 = 0$ haben, wo λ das Abstandverhältnis der gesuchten von den Ebenen $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ bedeutet (§ 12, 6). Dieses ist somit aus den Bedingungen der Aufgabe zu finden. Wir erhalten:

$$\lambda = -\frac{\sin(31)}{\sin(32)}.$$

5) Die Ebenen, welche durch die Kanten eines Dreikants senkrecht auf dessen gegenüberliegende Seiten gefällt werden, schneiden sich in einer Geraden.

Anl. Sind $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ die Gleichungen der Seiten des Dreikants in der Normalform, so sind die Gleichungen der drei Ebenen:

$$E_1 \cos(31) - E_2 \cos(32) = 0; \quad E_1 \cos(21) - E_3 \cos(23) = 0; \\ E_2 \cos(12) - E_3 \cos(13) = 0.$$

6) Die sechs Halbierungsebenen der Neigungswinkel der Seitenflächen eines Tetraeders schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte der eingeschriebenen Kugel.

Anl. Sind $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$, $E_4 = 0$ die Gleichungen der vier Seitenflächen des Tetraeders, so sind die Gleichungen der Halbierungsebenen:

$$E_1 - E_2 = 0; \quad E_1 - E_3 = 0; \quad E_1 - E_4 = 0; \quad E_2 - E_3 = 0; \quad E_2 - E_4 = 0; \quad E_3 - E_4 = 0.$$

Nun läßt sich leicht zeigen, daß jede der Halbierungsebenen durch den Durchschnittspunkt der drei Ebenen $E_1 - E_2 = 0$, $E_2 - E_3 = 0$ und $E_3 - E_4 = 0$ (§ 9, 3) hindurchgeht.

7) Die Halbierungsebenen der Neigungswinkel der drei Seitenflächen eines Tetraeders, welche eine Ecke bilden, und die Halbierungsebenen der drei gegenüberliegenden äußeren Neigungswinkel der Seitenflächen schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte einer äußeren Berührungskugel des Tetraeders.

Anl. Die Halbierungsebenen an der Ecke, die von den Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ gegeben sind, haben die Gleichungen

$$E_1 - E_2 = 0, \quad E_1 - E_3 = 0, \quad E_2 - E_3 = 0;$$

die Halbierungsebenen der drei gegenüberliegenden Neigungswinkel:

$$E_1 + E_4 = 0, \quad E_2 + E_4 = 0, \quad E_3 + E_4 = 0,$$

woraus sich mittelst § 9, 3 unser Satz ergibt.

8) Welche Sätze sind in den Gleichungen enthalten:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 + E_3 + E_4 &= 0 \\ -E_1 + E_2 + E_3 + E_4 &= 0 \\ E_1 - E_2 + E_3 + E_4 &= 0 \\ E_1 + E_2 - E_3 + E_4 &= 0 \\ E_1 + E_2 + E_3 - E_4 &= 0. \end{aligned}$$

Anl. Z. B. die erste läßt sich auf verschiedene Weise als durch Addition der Gleichungen bekannter Ebenen entstanden darstellen:

$$(E_1 + E_2) + (E_3 + E_4) = (E_1 + E_3) + (E_2 + E_4) = (E_1 + E_4) + (E_2 + E_3) = 0.$$

9) Liegen zwei Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ derart, daß die Schnittlinien der den gleichnamigen Ecken der beiden Tetraeder gegenüberliegenden Seitenflächen in einer Ebene liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien dieser Ecken in einem Punkte.

Anl. Es seien $A=0, B=0, C=0, D=0; A'=0, B'=0, C'=0, D'=0$ die Gleichungen der den gleichbezeichneten Tetraederecken gegenüberliegenden Seitenflächen.

Da die Ebenen, deren Gleichungen durch die nämlichen nur durch Striche unterschiedenen Symbole dargestellt werden, sich auf derselben Ebene schneiden, so läßt sich mittelst gewisser Constanten die Gleichung dieser Ebene in jeder der Formen ausdrücken:

$$\alpha A + \alpha' A' \equiv \beta B + \beta' B' \equiv \gamma C + \gamma' C' \equiv \delta D + \delta' D'.$$

Hieraus folgen die sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha A - \beta B &\equiv \beta' B' - \alpha' A'; & \beta B - \gamma C &\equiv \gamma' C' - \beta' B'; & \gamma C - \delta D &\equiv \delta' D' - \gamma' C' \\ \alpha A - \gamma C &\equiv \gamma' C' - \alpha' A'; & \beta B - \delta D &\equiv \delta' D' - \beta' B' \\ \alpha A - \delta D &\equiv \delta' D' - \alpha' A', \end{aligned}$$

diese Gleichungen lehren, daß je zwei gleichbezeichnete Kanten der beiden Tetraeder in einer Ebene liegen. Als die Gleichungen dieser sechs Ebenen können wir somit die folgenden ansehen:

$$\begin{aligned} \alpha A - \beta B &= 0; & \beta B - \gamma C &= 0; & \gamma C - \delta D &= 0 \\ \alpha A - \gamma C &= 0; & \beta B - \delta D &= 0 \\ \alpha A - \delta D &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich nach § 11 leicht zeigen, daß jede der sechs Ebenen durch den Durchschnitt der drei geht, deren Gleichungen in der ersten Zeile stehen.

10) Es ist zu zeigen, daß auch die lineare Gleichung zwischen den schiefwinkligen Coordinaten eines Punktes eine Ebene darstellt. Und umgekehrt.

Man beweise, daß die Gerade, welche irgend zwei Punkte des durch die Gleichung dargestellten Ortes verbindet, ganz in denselben hineinfällt. Zu dem

Zwecke drücke man die Coordinaten irgend eines Punctes der Geraden nach § 6, 1 durch die Coordinaten der beiden angenommenen Puncte aus und zeige, daß diese Werte der gegebenen linearen Gleichung genügen.

Die Umkehrung ergibt sich aus dem Umstande, daß sowohl in der linearen Gleichung drei unabhängige Constante vorkommen, als auch eine Ebene durch drei Puncte bestimmt ist. Denn bestimmt man diese Constanten derart, daß die durch die Gleichung dargestellte Ebene mit einer gegebenen drei Punkte gemein hat, so fällt jene mit dieser zusammen.

11) α) Sind a, b, c die Abschnitte, welche eine Ebene bezüglich auf der X -, Y - und Z -Axe eines schiefwinkligen Systems bildet, so ist ihre Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

β) Ist p der Abstand einer Ebene vom Ursprung eines schiefwinkligen Systems, und sind α, β, γ die Winkel, welche derselbe bezüglich mit der X -, Y - und Z -Axe einschließt, so ist ihre Gleichung:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Ergiebt sich, wenn die Ebene nicht durch den Ursprung geht, unmittelbar aus α , anderenfalls beziehe man die Ebene auf ein, dem gegebenen paralleles System, dessen Anfangspunct nicht in der Ebene liegt.

12) Es ist zu zeigen, daß die früher entwickelten Sätze (§ 7—11) auch gelten, wenn ein schiefwinkliges System zu Grunde liegt.

13) Die Aufgaben in § 12 für ein schiefwinkliges System zu lösen.

Drittes Capitel.

Der Punct.

§. 14.

Ebenencoordinaten und die Gleichung des Punctes.

In der Gleichung einer Ebene kommen drei constante, von einander unabhängige Größen vor, durch deren Angabe die Gleichung und damit auch die Lage der Ebene unzweideutig bestimmt ist. Schreibt man die Gleichung der Ebene etwa in der Form

$$ux + vy + wz + 1 = 0, \quad (1.)$$

so sieht man, daß die Lage der Ebene allein von den Größen u, v, w abhängt, und es sollen diese Größen, die ausreichende Bestimmungsstücke der Ebene sind, die Coordinaten der Ebene oder Ebenencoordinaten heißen zum Unterschiede von den früher allein angewandten, die einen Punct bestimmten und Punctcoordinaten genannt werden.

Sind demnach die Coordinaten u, v, w einer Ebene gegeben, so kann man aus ihnen die Gleichung der Ebene (1.) zusammensetzen, wodurch die Ebene selbst im Raume bestimmt ist.

Wir hätten von den Verhältnissen, welche sich aus den vier Größen A, B, C, D der allgemeinen Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

bilden lassen, irgend drei von einander unabhängige als Bestimmungsstücke der Ebene ansehen können, wählen aber hierzu die Verhältnisse

$$u = \frac{A}{D}, \quad v = \frac{B}{D}, \quad w = \frac{C}{D},$$

da dieselben, wie wir wissen, eine einfache geometrische Bedeutung haben, nämlich die negativen reciproken Abschnitte sind, welche die Ebene auf den Coordinatenaxen abschneidet und dann die Gleichung (1.) unverändert bleibt, wenn man darin die Punctcoordinaten x, y, z respective mit den Ebenencoordinaten u, v, w vertauscht.

Inbetreff dieser Ebenencoordinaten lassen sich nun ganz dieselben Fragen aufwerfen, die wir im vorhergehenden Capitel für die Punctcoordinaten erörterten. Der Frage nach den Eigenschaften aller Puncte, deren Coordinaten irgend einer gegebenen linearen Gleichung der Coordinaten genügen, entspricht hier die Frage nach

den Eigenschaften aller Ebenen, deren Coordinaten eine gegebene lineare Gleichung

$$Au + Bv + Cw + D = 0 \quad (1.)$$

in den Ebenencoordinaten u, v, w befriedigen.

Es läßt sich leicht zeigen, daß alle diese Ebenen sich in einem und demselben durch die Gleichung gegebenen Puncte schneiden. Denn ist

$$ux + vy + wz + 1 = 0 \quad (2.)$$

die Gleichung irgend einer dieser Ebenen, so genügen ihre Ebenencoordinaten u, v, w gemäß Voraussetzung der Gleichung

$$Au + Bv + Cw + D = 0.$$

Substituiert man daher in die linke Seite der Gleichung (2.) für die Coordinaten die Werte

$$x = \frac{A}{D}, \quad y = \frac{B}{D}, \quad z = \frac{C}{D},$$

so geht diese linke Seite über in $D (Au + Bv + Cw + D)$, wird also wegen (1.) Null; somit genügen diese Coordinatenwerte der Gleichung der Ebene (2.).

Wir erhalten so den Satz:

Alle Ebenen, deren Coordinaten u, v, w der linearen Gleichung in Ebenencoordinaten

$$Au + Bv + Cw + D = 0$$

genügen, schneiden sich in einem Puncte, dessen Coordinaten

$$x = \frac{A}{D}; \quad y = \frac{B}{D}; \quad z = \frac{C}{D}$$

sind.

Nachdem wir nun die in Punctcoordinaten lineare Gleichung wegen der Eigenschaft der Puncte, deren Coordinaten ihr genügen, eine Ebene zu bestimmen, die Gleichung der Ebene nannten, so verlangt die Analogie, daß wir die in Ebenencoordinaten lineare Gleichung wegen der Eigenschaft der Ebenen, deren Coordinaten ihr genügen, einen Punct zu bestimmen, die Gleichung dieses Punctes nennen.

Die obigen Formeln ergeben unmittelbar die Regel für die Bestimmung der Coordinaten eines durch seine Gleichung gegebenen Punctes und für die Bildung der Gleichung des Punctes, wenn seine Coordinaten gegeben sind. Bringt man nämlich die gegebene Punctgleichung auf die Form, in welcher das constante Glied die Einheit ist, so sind die Coefficienten der Ebenencoordinaten die Coordinaten des Punctes. Multipliciert man die gegebenen Coordinaten eines Punctes respective mit den Ebenencoordinaten und setzt die Summe

dieser Producte zur Einheit addiert gleich Null, so hat man die Gleichung dieses Punctes. Hiernach können wir zwei Formen der Gleichung des Punctes unterscheiden: die obige (1.), welche die allgemeine Gleichung des Punctes genannt werden soll, und jene, in welcher das constante Glied der Einheit gleich gemacht wurde und die die Normalform der Gleichung des Punctes heißt.

In dieser sind also die Coefficienten der Ebenencoordinaten u, v, w die Punctcoordinaten des dargestellten Punctes und sie bleibt ungeändert, wenn man in ihr die Coordinaten des Punctes respective mit den Ebenencoordinaten vertauscht.

Es hat sich im Vorhergehendem ergeben, daß alle Ebenen, deren Coordinaten einer linearen Gleichung genügen, durch einen Punct hindurchgehen; es ist aber klar, daß auch umgekehrt die Coordinaten einer jeden Ebene die durch einen gegebenen Punct hindurchgeht, seine Gleichung befriedigen müssen. Denn sind ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punctes, so ist seine Gleichung

$$u\xi + v\eta + w\zeta + 1 = 0;$$

geht nun die Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

durch den Punct ξ, η, ζ , so müssen seine Coordinaten der Gleichung der Ebene genügen, d. h. es ist

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0,$$

oder

$$\frac{A}{D}\xi + \frac{B}{D}\eta + \frac{C}{D}\zeta + 1 = 0.$$

Diese Gleichung geht aus der Punctgleichung hervor, wenn man darin

$$u = \frac{A}{D}, \quad v = \frac{B}{D}, \quad w = \frac{C}{D}$$

setzt. Es sind aber diese Größen die Ebenencoordinaten der gegebenen Ebene und sie genügen somit der Gleichung des Punctes.

§. 15.

Discussion der Gleichung eines Punctes.

Fehlt in der allgemeinen Gleichung eines Punctes

$$Au + Bv + Cw + D = 0$$

ein Glied, so wird dieser Punct eine specielle Lage besitzen.

Ist zunächst das constante Glied $D = 0$, also

$$Au + Bv + Cw = 0$$

die Gleichung des Punctes, so werden die Coordinaten desselben

$$x = \frac{A}{D}, y = \frac{B}{D}, z = \frac{C}{D}$$

unendlich groß, d. h. der Punct ist ein unendlich ferner. Somit sind die Schnittlinien aller Ebenen, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen, einander, und daher die Ebenen selbst einer bestimmten Richtung parallel.

Ist ein Coefficient einer Ebenencoordinate in der Gleichung Null, so liegt der Punct in einer Coordinatenebene, da dieser verschwindende Coefficient dividiert durch das constante Glied eine Coordinate des betreffenden Punctes darstellt.

Verschwindet z. B. A , ist also $Bv + Cw + D = 0$ die Gleichung des Punctes, so sind $x = 0$, $y = \frac{B}{D}$, $z = \frac{C}{D}$ seine Punctcoordinaten und somit liegt derselbe in der (YZ) -Ebene. Desgleichen liegt der Punct, dessen Gleichung $Au + Cw + D = 0$ ist, in der (XZ) -Ebene, und der Punct, der durch die Gleichung

$$Au + Bv + D = 0$$

dargestellt wird, in der $(Y\cancel{X})$ -Ebene. Ist daher außer dem Coefficienten einer der Ebenencoordinaten auch das constante Glied Null, so stellt die zweigliedrige Gleichung einen unendlich fernen Punct einer Coordinatenebene dar, und es sind somit alle Ebenen, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen, einer in der Coordinatenebene enthaltenen Richtung parallel.

Verschwinden in der Gleichung die Coefficienten zweier Ebenencoordinaten, so muß der durch sie bestimmte Punct in zwei Coordinatenebenen zugleich und daher in einer Axe liegen. Ist in einer dieser Gleichungen auch das constante Glied gleich Null, so hat man die Gleichung des unendlich fernen Punctes der betreffenden Axe. Alle Ebenen, deren Coordinaten der Gleichung genügen, sind dann jener Axe parallel: in der Gleichung einer solchen Ebene ist somit einer der Coefficienten der Coordinaten Null.

Verschwinden endlich die Coefficienten aller drei Ebenencoordinaten, so stellt die Gleichung

$$0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w + D = 0$$

den Coordinaten-Anfangspunct dar.

Damit nun die Coordinaten einer Ebene dieser Gleichung genügen können, muß mindestens eine unendlich und somit in ihrer allgemeinen Gleichung das constante Glied 0 sein, wie wir ebenfalls schon fanden.

§. 16.

Fortsetzung.

Da die Gleichung des Punctes drei von einander unabhängige Constante, die Verhältnisse dreier der Größen A, B, C, D zu derselben vierten, enthält, so wird derselbe durch jede Annahme festgelegt, welche zur Bestimmung dieser Constanten drei von einander unabhängige Gleichungen liefert. Also z. B. durch die Annahme, daß er in drei Ebenen liege, die sich nicht in derselben Geraden schneiden.

Es sei

$$ux + vy + wz + 1 = 0 \quad (1.)$$

die Gleichung des gesuchten Punctes x, y, z , der aus der Annahme bestimmt werden soll, daß er in drei Ebenen liege, die bezüglich die Ebenencoordinaten $u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3$ haben. Da er in jeder dieser Ebenen liegt, so erhält man zur Bestimmung seiner Coordinaten x, y, z die drei Gleichungen

$$u_1x + v_1y + w_1z + 1 = 0$$

$$u_2x + v_2y + w_2z + 1 = 0$$

$$u_3x + v_3y + w_3z + 1 = 0.$$

Die sich hieraus ergebenden Werte dieser Coordinaten in die angenommene Gleichung (1.) substituiert, liefern dann die Gleichung des Punctes. Dieselbe ergiebt sich aber auch unmittelbar aus der Bedingung, daß die vier obigen Gleichungen zusammen bestehen sollen, welche durch das Verschwinden ihrer Determinante ausgedrückt wird. Denn da u, v, w die Coordinaten irgend einer Ebene, welche durch den gesuchten Punct geht, bedeuten, so sind die Ebenencoordinaten jeder dieser Ebenen durch die Gleichung an einander gebunden:

$$\begin{vmatrix} u, & v, & w, & 1 \\ u_1, & v_1, & w_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & w_2, & 1 \\ u_3, & v_3, & w_3, & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.)$$

und diese ist somit die gesuchte Gleichung des Punctes, in welchem sich die drei Ebenen schneiden.

Entwickelt man diese Determinante nach den Elementen der ersten Zeile, so findet man mittelst der angegebenen Regeln für die Coordinaten des durch die Gleichung dargestellten Punctes:

$$\left. \begin{aligned} x &= - \frac{\begin{vmatrix} v_1, w_1, 1 \\ v_2, w_2, 1 \\ v_3, w_3, 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1, v_1, w_1 \\ u_2, v_2, w_2 \\ u_3, v_3, w_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} u_1, w_1, 1 \\ u_2, w_2, 1 \\ u_3, w_3, 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1, v_1, w_1 \\ u_2, v_2, w_2 \\ u_3, v_3, w_3 \end{vmatrix}} \\ z &= - \frac{\begin{vmatrix} u_1, v_1, 1 \\ u_2, v_2, 1 \\ u_3, v_3, 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1, v_1, w_1 \\ u_2, v_2, w_2 \\ u_3, v_3, w_3 \end{vmatrix}} \end{aligned} \right\} (2'.)$$

Diese Coordinatenwerte werden unendlich groß, wenn in den obigen Ausdrücken ihr gemeinschaftlicher Nenner und nur dieser, also bloß der Minor des Elementes 1 in der Determinante verschwindet. Verschwindet außerdem noch einer der Zähler, so können zwei Fälle eintreten*). Entweder verschwindet dann jeder Zähler, wodurch die Ausdrücke für x, y, z die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ erhalten: die drei Ebenen $u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3$ schneiden sich dann in einer Geraden, oder es verschwindet keiner der anderen Zähler, und dann sind die Schnittlinien je zweier der drei Ebenen einer der Coordinatenebenen parallel.

Man kann nämlich im ersten Falle immer zwei Größen λ_1 und λ_2 bestimmen, die den drei homogenen Gleichungen

$$u_3 = \frac{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad v_3 = \frac{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad w_3 = \frac{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (3.)$$

genügen. Denn lassen sich aus zweien dieser Gleichungen die λ_1 und λ_2 bestimmen — was nur im Falle des Verschwindens der Determinante der beiden Gleichungen möglich ist — so genügen sie von selbst infolge der Voraussetzung

$$\begin{vmatrix} u_1, v_1, w_1 \\ u_2, v_2, w_2 \\ u_3, v_3, w_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.)$$

der dritten.

Unbeschadet dieser Gleichheit können wir nämlich die Determinante (4.) dadurch transformieren, daß wir zu den mit λ_1 multiplicierten Elementen der ersten Zeile die darunter stehenden mit λ_2 der zweiten und mit $-(\lambda_1 + \lambda_2)$ multiplicierten der dritten Zeile addieren. In der so gewonnenen Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) u_3; & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) v_3; & \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) w_3 \\ u_2 &; & v_2 &; & w_2 \\ u_3 &; & v_3 &; & w_3 \end{aligned} \right| = 0 \quad (5.)$$

sind aber die Elemente der ersten Zeile der Determinante die linken Teile der Gleichungen (3.) und von diesen verschwinden wegen der

*) Vergleiche § 9.

Annahme, daß die λ_1 und λ_2 zwei dieser Gleichungen befriedigen, zwei derselben. Die Determinante zerfällt somit in das Product aus dem dritten Elemente dieser Zeile und seinen zugehörigen Minor. Damit nun dieses Product Null sei, muß einer dieser beiden Factoren verschwinden.

Verschwindet das Element, so genügen also die λ_1 und λ_2 auch der dritten Gleichung. Da nun in diesem Falle, unter Voraussetzung der Bestimmbarkeit von λ_1 und λ_2 , aus zwei der drei Gleichungen (3.) gleichzeitig alle drei befriedigt werden, so erfüllen je zwei dieser Gleichungen die Bedingung der Bestimmbarkeit des λ_1 und λ_2 , d. h. es verschwinden in diesem Falle gleichzeitig die Determinanten je zweier der drei Gleichungen (3.). Diese Determinanten sind aber die Minoren der Elemente u, v, w in der Determinante (2.), da

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} u_1 - u_3 & v_1 - v_3 \\ u_2 - u_3 & v_2 - v_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}; & \begin{vmatrix} u_1 - u_3 & w_1 - w_3 \\ u_2 - u_3 & w_2 - w_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} u_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_1 - v_3 & w_1 - w_3 \\ v_2 - v_3 & w_2 - w_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & 1 \\ v_2 & w_2 & 1 \\ v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} (6.)$$

Wir ersehen hieraus, daß in diesem Falle mit dem Minor des Elementes 1 und dem eines andern Elementes der ersten Zeile in der Determinante (2.) auch die Minoren aller übrigen Elemente dieser Zeile verschwinden und daß sich dann zwei Größen λ_1 und λ_2 bestimmen lassen, welche den obigen drei Gleichungen zugleich genügen.

Substituiert man nun die Werte (3.) für die Ebenencoordinaten u_3, v_3, w_3 in die Gleichung dieser Ebene $E_3 = 0$, so erhält man

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_2) E_3 &\equiv \lambda_1 (u_1 x + v_1 y + w_1 z + 1) + \lambda_2 (u_2 x + v_2 y + w_2 z + 1) \\ &\equiv \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2, \end{aligned}$$

wenn $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ die Gleichungen der beiden anderen gegebenen Ebenen bezeichnen. In diesem Falle schneiden sich also die drei Ebenen $E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = 0$ nach § 10 in einer Geraden.

Diese Folgerungen beruhen auf der Voraussetzung, daß in der zerfallenden Determinante (5.) nicht der Minor verschwinde, und es soll nun diese Annahme näher erörtert werden.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir voraussetzen, daß außer der Determinante (4.) auch der Zähler des z verschwinde, daß also überdies die Gleichung bestehe

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 - u_3 & v_1 - v_3 \\ u_2 - u_3 & v_2 - v_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (7.)$$

In Folge dieser Voraussetzung sind die beiden ersten Gleichungen in (3.) verträglich und es verschwinden somit in der Determinante (5.) die beiden ersten Elemente der ersten Zeile. Sie zerfällt also in das Product aus dem dritten Elemente der ersten Zeile und seinen Minor, wodurch die Gleichung übergeht in

$$[\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) w_3] \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Hierin verschwindet nach der Annahme die Determinante, also ist

$$u_2 v_3 = u_3 v_2, \quad \text{oder} \quad \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}. \quad (8.)$$

Entwickelt man nun in Gleichung (7.) die Determinante nach den Elementen ihrer ersten Zeile, so verschwindet wegen dieser Relation das letzte Glied und man erhält

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2 - u_3}{v_2 - v_3}.$$

Aus (8.) folgt aber *konst. Verh.*

$$\frac{u_2 - u_3}{v_2 - v_3} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3},$$

somit ist

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}. \quad (8')$$

In Folge dieser Relationen verschwindet die erste der Determinanten (6.) identisch, es verschwindet aber diese allein und kein anderer Minor der Elemente der ersten Zeile in der Determinante (2.), weshalb sich die Gleichungen (3.) nicht mehr durch das Verhältniß derselben zwei Gröfsen λ_1 und λ_2 befriedigen lassen.

Die Gleichungen der Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ haben dann, wenn mit ϱ der Wert der Verhältnisse (8') bezeichnet wird, die Form

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv v_1 (x + \varrho y) + w_1 z + 1 = 0 \\ E_2 &\equiv v_2 (x + \varrho y) + w_2 z + 1 = 0 \\ E_3 &\equiv v_3 (x + \varrho y) + w_3 z + 1 = 0. \end{aligned}$$

Die Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ gehen somit nach § 10 durch die Schnittlinie der Ebene $x + \varrho y = 0$ respective mit den Ebenen $w_1 z + 1 = 0$, $w_2 z + 1 = 0$, $w_3 z + 1 = 0$. Da nun diese Schnittlinien der (X Y)-Ebene parallel sind, so schneiden sich je zwei der drei Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ in zu der (X Y)-Ebene

parallelen Geraden; mit anderen Worten: die drei Ebenen schneiden sich in einem unendlich fernen Punkte der (XY) -Ebene, was übrigens auch unmittelbar aus § 15 folgt. In Übereinstimmung hiermit ergeben die Ausdrücke (2')

$$x = \infty, y = \infty, z = \frac{0}{0},$$

Coordinationen welche einen unendlich fernen Punkt der (XY) -Ebene bezeichnen. Denn nur für einen Punkt, der unendlich fernen Geraden der (XY) -Ebene, sind die X und Y -Coordinationen unendlich, die Z -Coordination aber nicht Null, sondern unbestimmt, da in der unendlich fernen Geraden der (XY) -Ebene alle zu ihr parallelen Ebenen sich schneiden.

In diesem Falle stellt also die Gleichung (2.) einen unendlich fernen Punkt der (XY) -Ebene dar.

Berücksichtigt man nun*), daß mit zwei Minoren der Elemente u, v, w in der Determinante (2.), wie am deutlichsten ihre Darstellung als Determinante zweiten Grades in (8.) zeigt, entweder die Minoren aller Elemente ihrer ersten Zeile verschwinden, wo dann die Gleichungen (3.) erfüllbar sind; oder diese beiden für sich identisch verschwinden, wenn nämlich eines der Paare Differenzen

$$u_1 - u_3, u_2 - u_3; \quad v_1 - v_3, v_2 - v_3; \quad w_1 - w_3, w_2 - w_3$$

verschwindet, so kann man die obigen Erörterungen in folgenden Satz zusammenfassen:

Verschwinden in der Determinante (2.) zwei Minoren der Elemente ihrer ersten Zeile, so sind dieselben entweder identisch Null, oder es verschwinden sämtliche. Im ersten Falle sind die Schnittlinien der drei Ebenen $u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3$ entweder einer Coordinatenebene parallel, oder sie vereinigen sich in einer Axe; im zweiten Falle schneiden sie sich in einer Geraden.

§ 17.

Fortsetzung.

Es seien nunmehr bloß zwei Gleichungen zwischen den Coordinationen x, y, z eines Punktes gegeben:

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z + 1 = 0$$

$$u_2 x + v_2 y + w_2 z + 1 = 0,$$

oder geometrisch gesprochen, der Punkt liege in jeder der Ebenen u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 . Diese zwei Gleichungen genügen dann nicht mehr, um alle drei Größen x, y, z zu bestimmen, sondern es lassen sich nur zwei derselben durch die dritte ausdrücken, die

*) Siehe § 9.

willkürlich bleibt. Wählt man zu dieser dritten etwa z , so erhält man die Gleichung eines Punctes, der den Ebenen $u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2$ gemeinsam ist, indem man in seine supponierte Gleichung

$$xu + yv + zw + 1 = 0,$$

die aus den beiden ersten Gleichungen entnommenen Ausdrücke für x und y substituirt, oder in der schon öfters geübten Weise aus der Bemerkung, daß diese drei Gleichungen zusammenbestehen sollen. Man findet so als Gleichung des Punctes:

$$\begin{vmatrix} u, & v, & w \\ u_1, & v_1, & w_1 \\ u_2, & v_2, & w_2 \end{vmatrix} z + 1 = 0,$$

oder nach bekannten Regeln

$$\begin{vmatrix} u, & v, & 1 \\ u_1, & v_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} u, & v, & w \\ u_1, & v_1, & w_1 \\ u_2, & v_2, & w_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Auf diese Form läßt sich somit die Gleichung jedes Punctes der Durchschnittslinie der beiden Ebenen u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 bringen; aber auch umgekehrt jeder Punct, dessen Gleichung die obige Form gegeben werden kann, liegt auf der Durchschnittslinie der beiden Ebenen, denn der Gleichung wird sowohl durch die Wertgruppe u_1, v_1, w_1 als auch u_2, v_2, w_2 genügt. Läßt man daher in der obigen Gleichung z alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhält man die Gesammtheit aller Puncte, die auf der Durchschnittslinie der beiden Ebenen liegen. Speciell für $z = 0$ findet man die Gleichung

$$\begin{vmatrix} u, & v, & 1 \\ u_1, & v_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

welche nach § 15 den Durchschnittspunct der Geraden mit der (XY) -Ebene darstellt; für $z = \infty$ nach § 15 die Gleichung des unendlich fernen Punctes.

Die Gleichung eines Punctes der Durchschnittslinie der beiden Ebenen wird also erhalten, indem man die linken Seiten der Gleichungen dieser beiden speciellen Puncte, mit bestimmten constanten Factoren multiplicirt, zu einander addirt. Es ist aber leicht einzusehen, daß man hierin unter Änderung der constanten Factoren die linken Seiten der Gleichungen dieser beiden speciellen Puncte durch die irgend zweier Puncte der Durchschnittslinie der Ebenen ersetzen kann, wie aus dem folgenden Satze hervorgeht:

Sind $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ die Gleichungen zweier Puncte,

λ_1 und λ_2 constante Größen, so liegt der Punct, dessen Gleichung auf die Form

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$$

gebracht werden kann, auf der Verbindungslinie der beiden Puncte.

Behufs des Beweises ist nur zu zeigen, daß jede Ebene, welche durch die beiden Puncte $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ hindurchgeht, auch den Punct $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$ enthält. Dies ist aber erwiesen, sobald gezeigt werden kann, daß die Substitution der Coordinaten einer Ebene, welche sowohl durch den Punct $P_1 = 0$ als auch $P_2 = 0$ hindurchgeht, den Ausdruck $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ zu Null macht. Dies ist aber thatsächlich der Fall, da für die Coordinaten einer solchen Ebene sowohl P_1 als P_2 verschwindet.

Von diesem Satze gilt auch die Umkehrung:

Liegt ein Punct auf der Verbindungslinie zweier Puncte, deren Gleichungen $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ seien, so lassen sich stets zwei constante Factoren λ_1 und λ_2 von der Art auffinden, daß die Gleichung dieses Punctes auf die Form

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$$

gebracht werden kann.

Der Beweis dieser Behauptung kann in folgender Weise geführt werden. Der Punct $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$, wo λ_1 und λ_2 erst zu bestimmende Constante seien, liegt auf der Verbindungslinie der Puncte $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$. Legt man nun durch den gegebenen Punct irgend eine Ebene, so lassen sich diese Constanten derart bestimmen, daß der Punct $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$ ebenfalls in dieser Ebene liegen, also mit dem gegebenen Puncte zusammenfallen muß. Man hat zu diesem Zwecke blos λ_1 und λ_2 der Bedingung zu unterwerfen, daß die Coordinaten dieser Ebene die Gleichung des Punctes

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$$

erfüllen. Bezeichnet man daher mit (P_1) und (P_2) die Substitutionsresultate der Coordinaten dieser Ebene bezüglich in P_1 und P_2 , so ist der gesuchte Wert des Verhältnisses $\lambda_1 : \lambda_2$:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = - \frac{(P_2)}{(P_1)};$$

die Gleichung des Punctes selbst stellt sich sonach in der Form dar

$$P_1 (P_2) - P_2 (P_1) = 0.$$

Den vorstehenden beiden Sätzen können wir auch die folgende Fassung geben:

Besteht zwischen den Gleichungen dreier Puncte

$$P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0$$

vermöge der Constanten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Identität

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0,$$

so liegen die drei Puncte in einer Geraden.

Und umgekehrt:

Liegen drei Puncte $P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0$ in einer Geraden, so lassen sich immer drei Constante $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auffinden, dergestalt, daß die Identität

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0$$

stattfindet.

Die Übereinstimmung dieser Behauptungen mit den vorhergehenden Sätzen ist klar, da sie nur aussagen, daß in diesen Fällen die linke Seite der Gleichung des Punctes $P_3 = 0$ auf die Form

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_3} P_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} P_2$$

gebracht werden kann, also seine Gleichung

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$$

ist.

Unsere Sätze führen uns wieder auf die Formeln, welche die Coordinaten eines Punctes, der auf der Verbindungslinie zweier Puncte liegt, durch die Coordinaten der letzteren ausdrückt. Sind nämlich $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ die Coordinaten der beiden Puncte, also

$$x_1 u + y_1 v + z_1 w + 1 = 0 \text{ und } x_2 u + y_2 v + z_2 w + 1 = 0$$

ihre Gleichung, so läßt sich der Gleichung jedes Punctes ihrer Verbindungslinie vermöge zweier Constanten λ_1 und λ_2 die Form geben $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) u + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) v + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) w + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ und somit haben seine Coordinaten x, y, z nach § 14 die Werte

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

§ 17 ¹⁶.

Fortsetzung.

Sind die Constanten x, y, z in der Punctgleichung

$$xu + yv + zw + 1 = 0$$

blos an eine Bedingungsgleichung

$$xu_1 + yv_1 + zw_1 + 1 = 0$$

gebunden, soll also der Punct ein Punct der Ebene u_1, v_1, w_1 sein, so läßt sich mittelst der letzteren Gleichung blos eine der unbestimmten Größen x, y, z aus der ersten Gleichung eliminieren, während

die beiden anderen unbestimmt bleiben. Wählt man zu letzteren die Gröfsen y, z , so erhält man die Gleichung eines Punctes, der in der Ebene u_1, v_1, w_1 liegt, in der Form:

$$\begin{vmatrix} u, & yv + zw + 1 \\ u_1, & yv_1 + zw_1 + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach bekannten Regeln

$$\begin{vmatrix} u, & 1 \\ u_1, & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} u, & v \\ u_1, & v_1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} u, & w \\ u_1, & w_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Hierin sind die y und z willkürliche Gröfsen und für jedes Wertsystem derselben liefert die Gleichung einen Punct der Ebene u_1, v_1, w_1 .

Auf obige Form läßt sich also die Gleichung eines jeden Punctes der Ebene u_1, v_1, w_1 bringen, aber auch umgekehrt: jeder Punct, dessen Gleichung die obige Form hat, liegt in der Ebene u_1, v_1, w_1 . Denn die Wertgruppe $u = u_1, v = v_1, w = w_1$ genügt der obigen Gleichung, da durch diese Substitution jede einzelne Determinante verschwindet. Läßt man daher in der Gleichung die willkürlichen Gröfsen y und z alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhält man die Gesamtheit aller Puncte, welche die Ebene constituieren.

Speciell für $y = 0, z = 0$ erhält man, wie die Form der Gleichung zeigt, nach § 15 den Durchschnittspunct der Ebene u_1, v_1, w_1 mit der X -Axe; für $y = \infty, z = 0$ stellt die Gleichung (§ 15) den unendlich fernen Punct der Durchschnittslinie der Ebene mit der (XY) -Ebene dar; für $y = 0, z = \infty$ den unendlich fernen Punct der Durchschnittslinie der Ebene mit der (XZ) -Ebene.

Die linke Seite der Gleichung eines Punctes der Ebene stellt sich somit dar als die Summe der mit bestimmten constanten Factoren multiplicierten linken Teile der Gleichungen dieser drei besonderen Puncte. Diese Thatsache ist nur eine Folge der beiden Sätze:

Sind $P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht in einer Geraden liegenden Puncte einer Ebene und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ constante Factoren, so stellt die Gleichung

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$$

einen Punct dieser Ebene dar.

Und umgekehrt:

Liegt ein Punct in der Ebene der drei Puncte

$$P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0,$$

so lassen sich stets drei constante Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von der Art auffinden, dafs die Gleichung dieses Punctes die Form annimmt

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0.$$

Der erste Satz folgt aus der Bemerkung, daß die linke Seite der Gleichung dieses Punctes: $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$ verschwindet für die Coordinaten der Ebene, welche durch die drei Puncte

$$P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0$$

bestimmt wird, da für dieselben sowohl P_1 als auch P_2 als auch P_3 verschwindet. Somit genügen sie der Gleichung des Punctes

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0.$$

Hieraus ergibt sich sofort die Umkehrung. Denn man kann in der Gleichung des Punctes $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$, welcher also in der Ebene der drei Puncte $P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0$ liegt, die Constanten λ_1, λ_2 und λ_3 derart bestimmen, daß er gleichzeitig in zwei gegebenen Ebenen liegt. Man hat zu diesem Behufe die λ_1, λ_2 und λ_3 bloß der Bedingung zu unterwerfen, daß der Gleichung

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$$

durch die Coordinaten jeder der beiden Ebenen genügt wird. Wählt man nun hierfür zwei Ebenen, welche durch den gegebenen Punct gehen, so fällt der Punct $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$ mit ihm zusammen.

Bezeichnen daher $(P_1), (P_2), (P_3)$ die Resultate der Substitution der Coordinaten der einen und $[P_1], [P_2], [P_3]$ jene der Coordinaten der zweiten Ebene bezüglich in P_1, P_2, P_3 , so erhält man die Gleichung des Punctes durch Elimination von λ_1, λ_2 und λ_3 aus den drei Gleichungen:

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$$

$$\lambda_1 (P_1) + \lambda_2 (P_2) + \lambda_3 (P_3) = 0$$

$$\lambda_1 [P_1] + \lambda_2 [P_2] + \lambda_3 [P_3] = 0,$$

wodurch sich ergibt:

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ (P_1) & (P_2) & (P_3) \\ [P_1] & [P_2] & [P_3] \end{vmatrix} = 0.$$

Diesen beiden Sätzen können wir wieder eine andere, für manche Anwendungen passendere Fassung geben:

Besteht zwischen den Gleichungen der vier Puncte $P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0, P_4 = 0$ vermöge der Constanten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ die Identität:

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \equiv 0,$$

so liegen die vier Puncte in derselben Ebene.

Sind $P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0, P_4 = 0$ die Gleichungen von vier Puncten, welche in derselben Ebene liegen, so

lassen sich stets vier Constante $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ von der Art angeben, daß die Identität

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \equiv 0$$

stattfindet.

Die Übereinstimmung dieser Aussagen mit den vorhergehenden ist klar, denn es wird darin nur behauptet, daß in diesen beiden Fällen die linke Seite der Gleichung $P_4 = 0$ auf die Form

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_4} P_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_4} P_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} P_3$$

gebracht werden kann, also

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$$

die Gleichung des Punctes $P_4 = 0$ ist.

Die beiden obigen Sätze lehren auch, wie sich die Punctcoordinaten irgend eines Punctes einer Ebene durch jene dreier gegebenen Puncte derselben ausdrücken lassen. Denn sind

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad x_3, y_3, z_3$$

die Coordinaten dreier Puncte einer Ebene, also

$$x_1 u + y_1 v + z_1 w + 1 = 0$$

$$x_2 u + y_2 v + z_2 w + 1 = 0$$

$$x_3 u + y_3 v + z_3 w + 1 = 0$$

die Gleichungen dieser Puncte, so läßt sich die Gleichung eines weiteren Punctes x, y, z der Ebene mittelst dreier Constanten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auf die Form bringen

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) u + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3) v \\ &+ (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3) w + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \end{aligned}$$

woraus sich für die Coordinaten des Punctes nach § 14 die Ausdrücke ergeben

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

$$y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

$$z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}.$$

§ 18.

Aufgabe. Ein Punct ist durch seine Gleichung und eine Ebene durch ihre Coordinaten gegeben: es soll der Abstand des Punctes von der Ebene gefunden werden.

Es seien ξ, η, ζ die Coordinaten des Punctes, also

$$\xi u + \eta v + \zeta w + 1 = 0$$

seine Gleichung in der Normalform, und U, V, W seien die Coordinaten der gegebenen Ebene.

Die Gleichung der Ebene ist dann

$$Ux + Vy + Wz + 1 = 0$$

und daher nach § 12, 5 ihr Abstand Δ vom Punkte ξ, η, ζ

$$\Delta = - \frac{\xi U + \eta V + \zeta W + 1}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}},$$

wo der Wurzel das positive Zeichen beizulegen ist. Der Zähler unseres Ausdruckes ergibt sich aber aus der Punctgleichung, indem wir darin an Stelle der laufenden Ebenencoordinaten u, v, w bezüglich jene der gegebenen Ebenen U, V, W substituiren. Somit erhalten wir die Regel:

Dividirt man den negativen linken Teil einer in der Normalform gegebenen Gleichung eines Punctes durch $+\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$, so erhält man den senkrechten Abstand des Punctes von der Ebene, deren Coordinaten U, V, W sind.

Hieraus ergibt sich unmittelbar die geometrische Bedeutung des Verhältnisses der Parameter, vermittelt welcher die linke Seite der Gleichung eines Punctes, der auf der Verbindungslinie zweier anderen liegt, aus dem linken Theile der Gleichungen der letzteren zusammengesetzt wird.

Es seien $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ die Gleichungen dieser Puncte in der Normalform, und $P_3 \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ die Gleichung des auf ihrer Verbindungslinie liegenden Punctes.

Legen wir durch den Punct P_3 eine Ebene E , deren Coordinaten U, V, W seien und sind die senkrechten Abstände derselben von P_1 und P_2 bezüglich p_1 und p_2 , so folgt, da U, V, W der Gleichung $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$ genügen:

$$\lambda_1 \frac{P_1}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} + \lambda_2 \frac{P_2}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} = 0$$

oder
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = - \frac{p_2}{p_1}.$$

Liegt nun P_3 innerhalb der Strecke $P_1 P_2$, so haben p_1 und p_2 entgegengesetzte Zeichen; liegt hingegen P_3 ausserhalb dieser Strecke, so sind p_1 und p_2 gleichbezeichnet. Daher ist immer

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{P_1 P_3}{P_3 P_2},$$

welches Verhältniss das Abstandsverhältniss des Punctes P_3 von P_1 und P_2 genannt werden mag.

Sind die Gleichungen der beiden Puncte P_1 und P_2 nicht in der Normalform gegeben, so sei m_1 der Factor, welcher die Gleichung

des ersten und m_2 jener, welcher die des zweiten Punctes in die Normalform überführt. Dann folgt aus $\lambda_1 m_2 (m_1 P_1) + \lambda_2 m_1 (m_2 P_2) = 0$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{P_3 P_2}{P_1 P_3},$$

Somit: Liegt ein Punct auf der Verbindungslinie zweier anderen, so ist das Verhältniss der beiden Parameter, welche die linken Theile der Gleichungen der beiden Ebenen zur linken Seite ihrer Gleichung verbinden, bis auf einen constanten Factor gleich dem Abstandsverhältnisse dieses Punctes von den beiden anderen. Dieser Factor reducirt sich auf die positive Einheit, wenn die Gleichungen der beiden Puncte die Normalform besitzen.

Unter der letzteren Voraussetzung ist somit die Gleichung des Halbirungspunctes der Strecke $P_1 P_2$

$$P_1 + P_2 = 0,$$

und jene des unendlich fernen Punktes

$$P_1 - P_2 = 0.$$

§ 19.

Das Gesetz der Reciprocität.

Die Entwicklungen dieses Capitels zeigen einen merkwürdigen Parallelismus mit jenen des vorhergehenden und ein grosser Teil der hier abgeleiteten Sätze und Formeln geht aus jenen hervor, indem man blofs das Wort Punct mit Ebene, und Punct- mit Ebenen-Coordinaten vertauscht. Eine kurze Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse dieser beiden Capitel wird klar diese Dualität hervortreten lassen.

Als Bedingung, dass die vier

Punkte $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ in einer Ebene liegen,		Ebenen $u, v, w; u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3$ sich in einem Punkte schneiden,
--	--	---

ergab sich

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \left| \quad \begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \right.$$

Lassen sich vier Constante $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ auffinden, mittelst welcher die Gleichungen der vier

Puncte		Ebenen
$P = 0, P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0$		$E = 0, E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = 0$

die Identität erfüllen

$$\begin{array}{l|l} \lambda P + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0 & \lambda E + \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 \equiv 0 \\ \text{so liegen die vier Puncte} & \text{so schneiden sich die vier Ebenen} \\ P = 0, P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0 & E = 0, E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = 0 \\ \text{in einer Ebene.} & \text{in einem Punkte.} \end{array}$$

Und umgekehrt.

Sind daher

$$x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 \quad | \quad u, v, w; u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3$$

die Coordinaten dieser vier

Puncte,

Ebenen,

so hängen sie durch die Gleichungen zusammen

$$\begin{array}{l|l} \lambda x + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0 & \lambda u + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \\ \lambda y + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0 & \lambda v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \\ \lambda z + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0. & \lambda w + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0 \\ & \lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{array}$$

Lassen sich drei Constante $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ auffinden, vermöge welcher die linken Seiten der Gleichungen der drei

$$\begin{array}{l|l} \text{Puncte} & \text{Ebenen} \\ P = 0, P_1 = 0, P_2 = 0 & E = 0, E_1 = 0, E_2 = 0 \\ \text{die Identität erfüllen} & \\ \lambda P + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \equiv 0, & \lambda E + \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 \equiv 0, \\ \text{so liegen die drei Puncte} & \text{so schneiden sich die drei Ebenen} \\ \text{in einer Geraden.} & \text{Und umgekehrt.} \end{array}$$

Sind $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ die Coordinaten der drei Puncte, Sind $u, v, w; u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2$ die Coordinaten der drei Ebenen, so hängen sie durch die Gleichungen zusammen

$$\begin{array}{l|l} \lambda x + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0 & \lambda u + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0 \\ \lambda y + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 & \lambda v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \\ \lambda z + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = 0 & \lambda w + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0 \\ & \lambda + \lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{array}$$

Die Bedingung für die Incidenz des Punctes x, y, z mit der Ebene u, v, w wird durch die Gleichung ausgedrückt

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

Die schon bemerkte Thatsache, dass die gegenüberstehenden Formeln und Sätze dieser Zusammenstellung aus einander hervorgehen durch Vertauschung der Worte Punct und Ebene und der Punct- mit den Ebenen-Coordinaten, ist der Ausdruck eines allgemeinen Gesetzes, welches den Namen das Gesetz der Reciprocität oder Dualität führt.

Dasselbe liefert zu jedem Satze, der eine reine Lagenbeziehung ausdrückt, unmittelbar einen zweiten, welcher der duale oder reciproke Satz genannt wird. Dies Gesetz zeigt sich schon bei den elementarsten Betrachtungen in der Geometrie, wo allerdings seine ungemeine Wichtigkeit wegen der unmittelbaren Evidenz der reciproken Sätze nicht zu erfassen ist. So sind z. B. die gegenüberstehenden Sätze:

Eine Gerade und ein Punct außerhalb derselben bestimmen eine Ebene.

Zwei Ebenen bestimmen eine Gerade.

Drei Ebenen schneiden sich in einem Puncte

Eine Gerade und eine Ebene außerhalb derselben bestimmen einen Punct.

Zwei Puncte bestimmen eine Gerade.

Drei Puncte liegen in einer Ebene

u. s. f.

duale oder reciproke Sätze.

Dieses Gesetz wollen wir nunmehr, soweit es die vorhergehenden Entwicklungen gestatten, auseinandersetzen.

Denken wir uns eine Reihe von Gleichungen in Punct- und Ebenencoordinaten gegeben, so werden dieselben ein System von Puncten, Ebenen und Geraden im Raume bestimmen, deren Inbegriff wir als das System Σ bezeichnen wollen. Diesem Systeme Σ stellen wir ein zweites Σ' gegenüber, dessen Elemente (Puncte, Ebenen und Geraden) wir dadurch erhalten, dass wir in dem gegebenen Gleichungssysteme die laufenden Punct- durch Ebenen-Coordinaten und die laufenden Ebenen- durch Punct-Coordinaten ersetzen. Somit tritt an Stelle jedes Punctes in Σ eine Ebene in Σ' und an Stelle jeder Ebene von Σ ein Punct in Σ' . Zwei solche Elemente der beiden Systeme Σ und Σ' , deren Gleichungen durch Vertauschung der Punct- und Ebenen-Coordinaten ineinander übergehen, mögen der Kürze halber entsprechende Elemente genannt werden. Liegt nun ein Punct A des einen Systems in einer Ebene b desselben, so geht die A entsprechende Ebene a' im anderen Systeme durch den der Ebene b entsprechenden Punct B' desselben.

Denn ist $mx + ny + pz + q = 0$
die Gleichung der Ebene b , und ist

$$\xi u + \eta v + \zeta w + 1 = 0$$

die Gleichung des Punctes A , so ist gemäß Voraussetzung

$$m\xi + n\eta + p\zeta + q = 0.$$

Die Gleichung des Punctes B' ist nun

$$mu + nv + pw + q = 0,$$

und die der Ebene a' :

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0,$$

somit befriedigen die Coordinaten dieser Ebene ξ , η , ζ die Gleichung des Punctes B' wegen (1.) und es geht also die Ebene α' durch den Punct B' . Hieraus folgt:

Liegen in dem einen Systeme mehrere Puncte in einer Ebene, so schneiden sich deren entsprechende Ebenen des anderen Systems in dem der Ebene entsprechenden Puncte. Somit

durchläuft in dem einen Systeme ein Punct eine Gerade, also die Schnittlinien zweier Ebenen, so umhüllt die entsprechende Ebene im anderen Systeme wieder eine bestimmte Gerade.

Gehen in dem einen Systeme mehrere Ebenen durch einen Punct, so liegen die diesen Ebenen entsprechenden Puncte des anderen Systems in der dem Puncte entsprechenden Ebene. Somit:

Dreht sich in dem einen Systeme eine Ebene um eine Gerade, also die Verbindungslinie zweier Puncte, so durchläuft der entsprechende Punct im anderen Systeme wieder eine Gerade.

Wir können zwei solche Gerade wieder als entsprechende bezeichnen.

Die beiden Systeme Σ und Σ' sind also so beschaffen, dass jedem Puncte des einen eine Ebene des anderen, jeder Geraden wieder eine Gerade entspricht, und dass, wenn zwei Elemente (Punct, Ebene oder Gerade) des einen Systems vereinigt sind, auch bei den entsprechenden Elementen des anderen Systems dies stattfindet.

Es entspricht also dem Durchschnittspuncte dreier Ebenen des einen Systems die Ebene der drei entsprechenden Puncte des anderen; dem Durchschnittspuncte einer Geraden mit einer Ebene, die Ebene, welche durch die entsprechende Gerade und den entsprechenden Punct gelegt wird; der Verbindungslinie zweier Puncte die Durchschnittslinie der entsprechenden Ebenen u. s. f.

Haben wir nun durch Combination der gegebenen Gleichungen gefunden, dass in Σ gewisse Elemente vereinigt sind, so sind in Σ' die diesen entsprechenden Elemente ebenfalls vereinigt. Es ergiebt sich also aus dem Satze über das System Σ unmittelbar ein Satz über das System Σ' und zwar, wenn in dem ersteren bloß vom Verbinden von Puncten, Puncten und Geraden, Geraden, oder vom Durchschnitte von Ebenen, Ebenen und Geraden, Geraden, die Rede ist, dadurch, daß in seinem Wortlaute Punct mit Ebene, Verbindungslinie zweier Puncte mit Schnittlinie zweier Ebenen, Durchschnittspunct einer Geraden und Ebene mit Verbindungsebenen einer Geraden und eines Punctes etc. vertauscht wird.

Es mag dieses Gesetz der Reciprocität an einem Beispiele erläutert werden; wir wählen hierzu die Aufgabe 9 in § 13.

Es wurde dort gezeigt, dass, wenn die Schnittlinien der gleichbezeichneten Seitenflächen der beiden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ in einer Ebene liegen, die Verbindungslinien der gleichbezeichneten Ecken sich in einem Punkte schneiden.

Wir betrachten nun die Ebenen und Ecken der beiden Tetraeder als Elemente des Systems Σ und construieren uns das System Σ' .

Der Ecke A entspreche in Σ' die Ebene α , B : β , C : γ , D : δ ; A' : α' , B' : β' , C' : γ' , D' : δ . Dann entspricht der Seitenfläche BCD der Durchschnittspunkt A der drei Ebenen β , γ , δ ; ABC der Durchschnittspunkt Δ der Ebenen α , β , γ ; ABD der Durchschnittspunkt Γ der Ebenen α , β , δ ; ACD der Durchschnittspunkt B der Ebenen α , γ , δ u. s. f.

Der Durchschnittslinie der Seitenflächen ABC und $A'B'C'$ entspricht somit die Verbindungslinie ihrer entsprechenden Punkte $\Delta\Delta'$; der Durchschnittslinie von ABD und $A'B'D'$ die Gerade $\Gamma\Gamma'$; der Durchschnittslinie von ACD und $A'C'D'$ die Gerade BB' ; endlich der Durchschnittslinie von BCD und $B'C'D'$ die Gerade AA' . Diese vier Geraden AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$ müssen sich in einem Punkte O' schneiden, da ihre entsprechenden Geraden der Voraussetzung nach in einer Ebene liegen.

Es wurde nun bewiesen, dass die vier Geraden AA' , BB' , CC' , DD' sich in einem Punkte schneiden, daher müssen im reciproken Systeme die entsprechenden Geraden in einer Ebene liegen. Die entsprechenden Geraden sind aber bezüglich die Schnittlinien der Ebenen α und α' , β und β' , γ und γ' , δ und δ' , d. h. die Durchschnittslinie der gleichbezeichneten Seitenflächen der beiden Tetraeder $AB\Gamma\Delta$ und $A'B'\Gamma'\Delta'$.

Auf diese Weise gewinnen wir also aus dem bewiesenen Satze über die beiden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ den neuen Satz: Liegen zwei Tetraeder $AB\Gamma\Delta$ und $A'B'\Gamma'\Delta'$ derart, dass die Verbindungslinien der gleichbezeichneten Ecken sich in einem Punkte schneiden, so liegen die Schnittlinien der gleichbezeichneten Seitenflächen in einer Ebene.

Viertes Capitel.

§ 20.

Die Gerade.

Die Gerade lässt eine zweifache Bestimmungsweise zu: sie ist geometrisch bestimmt sowohl durch die Angabe zweier Ebenen, die sich in ihr schneiden, als auch zweier Punkte, die in ihr liegen. Sie kann demnach auch in zweifacher Weise analytisch dargestellt werden: sowol durch ein System zweier linearen Gleichungen in Punct- als auch in Ebenen-Coordinaten. Denn die Punkte, deren Coordinaten zwei linearen Gleichungen in Punct-Coordinaten zugleich genügen, sind beiden Ebenen gemeinsam, die durch diese linearen Gleichungen repräsentiert werden, sind also die Punkte der Durchschnittslinie der beiden Ebenen; und die Ebenen, deren Coordinaten zwei linearen Gleichungen in Ebenen-Coordinaten zugleich genügen, enthalten beide Punkte, die durch diese linearen Gleichungen repräsentiert werden, schneiden sich somit in der Verbindungslinie der beiden Punkte, oder umhüllen sie, wie man zu sagen pflegt.

Sind nun etwa

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

die Gleichungen zweier Ebenen, so kann man ihre Schnittlinie durch das simultane System zweier anderen linearen Gleichungen ersetzen, die durch Specialisierung der Parameter λ und λ' aus

$$\lambda(Ax + By + Cz + D) + \lambda'(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

hervorgehen, da alle diese Ebenen sich in derselben Geraden schneiden. Aus den durch Individualisirung von λ und λ' hervorgehenden Gleichungen werden wir selbstverständlich zur Darstellung der Geraden zwei möglichst einfache wählen, also etwa zwei jener drei Gleichungen, in welchen λ und λ' Werthe besitzen, für welche der Coefficient einer der Variablen verschwindet. Diese drei Gleichungen werden somit erhalten, indem man den Werth des Verhältnisses $\lambda : \lambda'$ aus je einer der drei Gleichungen:

$$\lambda A + \lambda' A' = 0, \quad \lambda B + \lambda' B' = 0, \quad \lambda C + \lambda' C' = 0$$

bestimmt. Die Gleichungen selbst haben dann die Form

$$fx + gy + h = 0, \quad mx + nz + p = 0, \quad ry + sz + t = 0.$$

In jeder dieser Gleichungen ist der einer Coordinate zugehörige Coefficient Null, somit stellt jede derselben eine durch die Gerade

gehende und auf einer Coordinatenebene senkrechte Ebene dar, und zwar steht die erste senkrecht auf der (XY) -, die zweite auf der (XZ) - und die dritte auf der (YZ) -Ebene. Man nennt jede dieser Ebenen die projicierende Ebene auf die betreffende Coordinatenebene, da in ihr die projicierenden Geraden aller Punkte der gegebenen Geraden auf diese Coordinatenebene enthalten sind. Der Schnitt jeder derselben mit der Coordinatenebene, auf der sie senkrecht steht, enthält die Projectionen aller Punkte der Geraden auf die betreffende Coordinatenebene und heisst deshalb ihre Projection auf dieselbe. Die Gleichungen dieser Projectionen in den betreffenden Coordinatenebenen sind nach § 8 die obigen drei Gleichungen. Durch je zwei derselben können wir die Gerade im Raume repräsentieren.

Analog können wir, wenn die Gerade durch zwei gleichzeitig bestehende Punktgleichungen:

$$Au + Bv + Cw + D, \quad A'u + B'v + C'w + D' = 0$$

gegeben ist, dieselben durch zwei andere darstellen, welche aus

$$\lambda(Au + Bv + Cw + D) + \lambda'(A'u + B'v + C'w + D') = 0$$

für specielle Werthe der Parameter λ und λ' hervorgehen, da alle Punkte, deren Gleichung auf diese Weise erhalten wird, in derselben Geraden liegen. Wir werden selbstverständlich solche Werthe wählen, welche die Gleichung vereinfachen, also etwa die, für welche einer der Coefficienten der Variablen u, v, w in der neuen Gleichung verschwindet. Diese Werthe liefern die drei Gleichungen

$$\lambda A + \lambda' A' = 0, \quad \lambda B + \lambda' B' = 0, \quad \lambda C + \lambda' C' = 0;$$

die diesen Werthen entsprechenden Punktgleichungen haben somit bezüglich die Form:

$$rv + sw + t = 0, \quad mu + nw + p = 0, \quad fu + gv + h = 0.$$

Jede derselben stellt nach § 15 den Durchschnittspunkt der Geraden mit einer Coordinatenebene dar und zwar die erste mit der (YZ) -, die zweite mit der (XZ) - und die dritte mit der (XY) -Ebene dar. Je zwei derselben können zur Repräsentation der Geraden dienen.

§ 21.

Die Constanten in den Gleichungen der Geraden.

Wir wollen nun die geometrische Bedeutung der Constanten, welche in diesen vereinfachten Gleichungen einer Geraden auftreten, zu eruieren suchen.

Es seien

$$fx + gy + h = 0, \quad mx + nz + p = 0, \quad ry + sz + t = 0$$

die Gleichungen der drei die Gerade projicierenden Ebenen. Je zwei

derselben stellen die Gerade dar und es kann daher jede durch Elimination der gemeinsamen Coordinate aus den beiden anderen abgeleitet werden.

Von den drei Gleichungen wählen wir etwa die beiden, welche die Projectionsebene auf die (XZ) - und (YZ) -Ebenen darstellen, zur Repräsentation der Geraden. Dieselbe denken wir uns demnach durch zwei Gleichungen von der Form

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

individualisiert. Setzen wir hierin $z = 0$, so finden wir

$$x = p, \quad y = q,$$

d. h. p und q sind die Coordinaten des Durchschnittspunctes der Geraden mit der (XY) -Ebene. Sind daher x, y, z die Coordinaten irgend eines Punctes der Geraden und ist r seine Entfernung vom Puncte p, q, o , so ist nach § 4, 2

$$\frac{x-p}{r} = \cos \alpha; \quad \frac{y-q}{r} = \cos \beta; \quad \frac{z}{r} = \cos \gamma,$$

wo α, β, γ die Winkel sind, welche die Gerade bezüglich mit der X -, Y - und Z -Axe bildet. Da nach der Voraussetzung aber x, y, z ein Punct der Geraden ist, so müssen seine Coordinaten den Gleichungen der Geraden genügen und es ist somit

$$x - p = mz, \quad y - q = nz,$$

daher

$$\cos \alpha = m \frac{z}{r}, \quad \cos \beta = n \frac{z}{r},$$

oder

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} = m, \quad \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = n. \quad (1.)$$

Vermöge der Relation § 3, 4

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

lassen sich nun die Winkel α, β, γ , welche die Gerade mit den Axen bildet, durch die Constanten m und n der Geraden ausdrücken; es ist nämlich

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}; \quad \cos \beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}; \quad \cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}, \quad (2.)$$

wo die Wurzel dasselbe Zeichen besitzt, aber positiv oder negativ genommen werden kann, da sich die Winkel, deren Cosinus entgegengesetzte Zeichen haben, um 180° von einander unterscheiden.

Auch die Coefficienten in den Gleichungen der Durchschnittspuncte der Geraden mit den Coordinatenebenen haben einfache geometrische Bedeutung. Da jedoch dieselbe für das Folgende ohne Belang ist, so wollen wir auf die Untersuchung dieser Bedeutung nicht weiter eingehen.

§ 21.

Winkel zweier Geraden.

Die vorhergehenden Formeln ermöglichen es, den Winkel, den zwei durch ihre Gleichungen gegebene Gerade mit einander bilden, zu berechnen. Sind nämlich

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

die Gleichungen der einen und

$$x = m'z + p', \quad y = n'z + q'$$

die Gleichungen der anderen Geraden, so sind die Winkel α, β, γ , welche die erstere, und die Winkel α', β', γ' , welche die zweite bezüglich mit der X-, Y- und Z-Axe bildet, durch die Formeln gegeben § 20, 2

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}}; & \cos \beta &= \frac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}}; & \cos \alpha &= \frac{m}{\sqrt{1+m^2+n^2}}; \\ \cos \gamma' &= \frac{1}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}}; & \cos \beta' &= \frac{n'}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}}; & \cos \alpha' &= \frac{m'}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}}; \end{aligned}$$

daher ist nach § 4, 5 der Winkel ϑ , den die beiden Geraden einschließen, durch den Ausdruck bestimmt

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' \\ &= \frac{mm' + nn' + 1}{\sqrt{1+m^2+n^2} \sqrt{1+m'^2+n'^2+1}}. \end{aligned} \quad (1.)$$

Hieraus kann man nun die Relationen ableiten, die zwischen den Constanten der Gleichungen der beiden Geraden bestehen müssen, damit dieselben entweder senkrecht auf einander stehen, oder zu einander parallel seien.

Sollen die beiden Geraden senkrecht auf einander sein, so muß $\vartheta = 90^\circ$, also $\cos \vartheta = 0$ sein, somit drückt

$$mm' + nn' + 1 = 0 \quad (2.)$$

die Bedingung aus, unter welcher die beiden Geraden senkrecht aufeinander stehen. Ist $\vartheta = 0$, also $\cos \vartheta = 1$, so sind die beiden Geraden zu einander parallel. Dann muß aber

$$mm' + nn' + 1 = \sqrt{m^2 + n^2 + 1} \sqrt{m'^2 + n'^2 + 1},$$

also

$$(mn' - m'n)^2 + (m - m')^2 + (n - n')^2 = 0.$$

Die Summe dieser drei positiven Größen kann aber nur Null sein, wenn jede derselben Null ist. Diese drei Ausdrücke verschwinden nun, wenn

$$m = m', \quad n = n' \quad (3.)$$

ist. Somit drücken diese beiden Gleichungen die Beding-

ung aus, unter der die beiden Geraden zu einander parallel sind. Dieselben zeigen, daß dann die Ebenen, welche die beiden Geraden auf dieselbe Coordinatenebene projicieren, zu einander parallel sind, wie wir denn umgekehrt aus dieser geometrischen Thatsache die obigen Bedingungsgleichungen für den Parallelismus der beiden Geraden hätten ableiten können.

§ 22.

Winkel einer Geraden und Ebene.

Um den Winkel zu berechnen, den eine Gerade und eine Ebene mit einander bilden, gehen wir von der Bemerkung aus, daß dieser Winkel jenen zu 90° ergänzt, welchen die Gerade mit dem Perpendikel auf die Ebene einschließt. Die Winkel, die dieses Perpendikel mit den Axen bildet, sind aber durch die Gleichung der Ebene § 7, 2 gegeben und daher auch der Winkel, den diese beiden Geraden einschließen, leicht bestimmbar.

Es sei

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung der Ebene, und

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

seien die Gleichungen der Geraden.

Bezeichnen α, β, γ die Winkel, welche das Perpendikel auf die Ebene bezüglich mit der X-, Y- und Z-Axe einschließen, so ist

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

wo für die allgemeine Wurzel jenes Zeichen zu nehmen ist, durch welches $\frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ positiv wird; die Winkel λ, μ, ν , welche die Gerade bezüglich mit der X- Y- und Z-Axe bildet, sind wieder durch die Formeln gegeben § 20, 2

$$\cos \lambda = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}; \quad \cos \mu = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}; \quad \cos \nu = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}.$$

Bezeichnet daher ϑ den Winkel, den die Gerade mit der Ebene bildet, so ist $90^\circ - \vartheta$ der Winkel, den dieselbe mit dem Perpendikel einschließt und daher

$$\sin \vartheta = \frac{Am + Bn + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + 1}}. \quad (1.)$$

Aus dieser Formel kann man nun die Bedingungen ableiten, unter welchen eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, oder ihr parallel ist.

Für den Fall des Parallelismus ist $\vartheta = 0$ und drückt daher

$$Am + Bn + C = 0 \quad (2.)$$

die Bedingung aus, daß die Gerade der Ebene parallel sei.

Zu derselben Relation gelangt man durch Berechnung der Coordinaten des Schnittpunctes der Geraden und der Ebene. Dieselben stellen sich als drei Quotienten mit demselben Nenner dar und werden somit ∞ , wenn letzterer Null wird. Das Verschwinden dieses Nenners drückt also die Bedingung aus, unter welcher sich die Gerade und Ebene in einem unendlich fernen Punkte schneiden, d. h. parallel sind.

Für den Fall des Senkrechtstehens ergibt die obige Formel aus $\vartheta = 90^\circ$

$$\begin{aligned} (Am + Bn + C)^2 &= (A^2 + B^2 + C^2)(m^2 + n^2 + 1), \\ \text{oder} \quad (An - Bm)^2 + (A - Cm)^2 + (B - Cn)^2 &= 0, \end{aligned}$$

welche Gleichung nur bestehen kann, wenn jeder Summand der Summe verschwindet, wenn also

$$A = Cm, \quad B = Cn.$$

Es ist somit

$$A : B : C = m : n : 1 \quad (3.)$$

die Bedingung, daß die Ebene und Gerade aufeinander senkrecht stehen. Aus diesen Gleichungen folgt die Thatsache, daß die Projection der Geraden auf eine Coordinatenebene senkrecht steht auf der Schnittlinie der Ebene mit dieser Coordinatenebene. Denn aus

$$A = Cm, \quad B = Cn$$

folgt

$$m = \frac{A}{C}; \quad n = \frac{B}{C}.$$

Die erste Gleichung zeigt aber, daß die beiden Geraden in der (XZ) -Ebene, deren Gleichungen

$$Ax + Cz + D = 0 \quad \text{und} \quad x = mz + p,$$

sind, — von denen also die erste die Durchschnittsline der Ebene mit der (XZ) -Ebene und die zweite die Projection der Geraden auf dieselbe darstellt — und die zweite, daß die Geraden in der (ZY) -Ebene

$$By + Cz + D = 0 \quad \text{und} \quad y = nz + q$$

aufeinander senkrecht stehen.

Aus diesem geometrisch evidenten Umstande hätte man wieder umgekehrt die Bedingung ableiten können, unter welcher eine Ebene und Gerade auf einander senkrecht stehen.

§ 23.

Bedingung, daß eine Gerade in einer Ebene liegt und zwei Gerade sich schneiden.

Sind

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

die Gleichungen einer Geraden, so läßt sich der Gleichung jeder Ebene, welche durch dieselbe hindurchgeht, die Form geben

$$\lambda_1 (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2 (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Soll daher die Gerade in der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

liegen, so müssen sich die λ_1 und λ_2 darart bestimmt lassen, daß die Identität besteht

$$\begin{aligned} \lambda_1 (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2 (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) \\ \equiv Ax + By + Cz + D. \end{aligned}$$

Da diese Identität für alle Werte von x, y, z gelten soll, so müssen die λ_1 und λ_2 den Gleichungen genügen:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - A = 0$$

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 - B = 0$$

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - C = 0$$

$$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 - D = 0.$$

Damit nun diese Gleichungen sollen zusammenbestehen können, müssen die Werte von λ_1 und λ_2 aus zweien derselben berechnet den beiden anderen genügen; es muß also die Determinante von zweimal drei dieser vier Gleichungen verschwinden. Da dann die Werte von λ_1 und λ_2 allen vier Gleichungen genügen, so verschwindet auch die Determinante von je drei der vier Gleichungen.

Die Bedingung, daß die Gerade in der Ebene liegt, wird also durch die vier Gleichungen ausgedrückt

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A \\ B_1 & B_2 & B \\ C_1 & C_2 & C \end{vmatrix} &= 0, & \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A \\ B_1 & B_2 & B \\ D_1 & D_2 & D \end{vmatrix} &= 0 \\ \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A \\ C_1 & C_2 & C \\ D_1 & D_2 & D \end{vmatrix} &= 0, & \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B \\ C_1 & C_2 & C \\ D_1 & D_2 & D \end{vmatrix} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.)$$

von denen aber je zwei die Folge der beiden anderen sind.

Sind die Gleichungen der Geraden in den speciellen Formen gegeben

$$x = mz + p, \quad y = nz + q,$$

so reducieren sich die vier Determinanten auf die beiden Relationen

$$Am + Bn + C = 0, \quad Ap + Bq + D = 0. \quad (2.)$$

Wir wollen dieselben noch in anderer Weise ableiten, die auch angewandt werden kann, wenn die Gleichungen der Geraden in der allgemeinen Form gegeben sind.

Da für jeden Punct der Ebene, der zugleich ein Punct der Geraden ist, die x - und y -Coordinationen desselben vermöge der Gleichungen der Geraden durch die z -Coordinate ausgedrückt werden, so ist für jeden Punct der Geraden

$$(Am + Bn + C)z + Ap + Bq + D = 0.$$

Diese Gleichung kann aber nur dann für alle möglichen Werte von z bestehen, wenn

$$Am + Bn + C = 0, \quad Ap + Bq + D = 0.$$

2) Zwei Gerade liegen im Allgemeinen nicht in einer Ebene und es werden daher bei zwei solchen Geraden die Constanten ihrer Gleichungen gewissen Bedingungen genügen müssen, die sich unmittelbar aus der Thatsache ergeben, daß beide Geraden einen Punct gemeinsam haben müssen.

Sind nämlich

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

die Gleichungen der einen und

$$A_1'x + B_1'y + C_1'z + D_1' = 0; \quad A_2'x + B_2'y + C_2'z + D_2' = 0$$

die der anderen Geraden, so müssen die Coordinaten ξ, η, ζ des Durchschnittspunctes der beiden Geraden jeder dieser Gleichung genügen, d. h. es müssen die vier Gleichungen zusammenbestehen

$$A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1 = 0$$

$$A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2 = 0$$

$$A_1'\xi + B_1'\eta + C_1'\zeta + D_1' = 0$$

$$A_2'\xi + B_2'\eta + C_2'\zeta + D_2' = 0.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn ihre Determinante verschwindet. Somit ist die Bedingung, daß sich die Geraden schneiden:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_1' & B_1' & C_1' & D_1' \\ A_2' & B_2' & C_2' & D_2' \end{vmatrix} = 0. \quad (1'.)$$

Sind die Gleichungen der Geraden in der Form gegeben

$$\begin{aligned}x &= mz + p, & y &= nz + q, \\x &= m'z + p', & y &= n'z + q',\end{aligned}$$

so reducirt sich die obige Relation auf den einfacheren Ausdruck

$$\frac{p - p'}{m - m'} = \frac{q - q'}{n - n'}. \quad (2')$$

Man hätte diese Relation auch dadurch ableiten können, daß man den Wert von z aus je zwei unter einander stehenden der obigen Gleichungen berechnete.

Die Berechnung der ξ , η , ζ der Coordinaten des Durchschnittspunctes der beiden Geraden aus dem obigen Gleichungssysteme ließen auch die Bedingungen erkennen, unter welchen sich die beiden Geraden in einem unendlich fernen Punkte schneiden, also sie zu einander parallel sind. Dies wird stattfinden, wenn der gemeinsame Nenner von ξ , η , ζ verschwindet, so daß das gleichzeitige Verschwinden dieser Determinante und der des Gleichungssystems (1') die gesuchte Bedingung für die Parallelität der beiden Geraden ausdrückt. Im Falle jede der beiden Geraden durch die Gleichungen ihrer Projectionsebenen auf die (XZ) - und (YZ) -Ebene dargestellt wird, ergeben sich hieraus wieder die einfachen Bedingungsgleichungen des § 21.

3) Wir wollen schließlicly noch die Gleichung der Ebene, welche durch die beiden sich schneidenden Geraden gebildet wird, aufstellen.

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ noch unbestimmte Parameter; die Gleichung

$$\lambda_1 (A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda_2 (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$$

gehört einer Ebene an, welche durch die eine, und

$$\lambda_3 (A_1' x + B_1' y + C_1' z + D_1') + \lambda_4 (A_2' x + B_2' y + C_2' z + D_2') = 0$$

einer Ebene, welche durch die zweite Gerade geht. Die Gleichung der Ebene, welche durch beide Gerade hindurchgeht, muß sich somit auf jede dieser Formen bringen lassen. Es müssen also die Parameter derartig sein, daß man identisch hat:

$$\begin{aligned}&\lambda_1 (A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda_2 (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) \\&\equiv \lambda_3 (A_1' x + B_1' y + C_1' z + D_1') + \lambda_4 (A_2' x + B_2' y + C_2' z + D_2')\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}&(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) x + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) y + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) z + \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 \\&\equiv (\lambda_3 A_1' + \lambda_4 A_2') x + (\lambda_3 B_1' + \lambda_4 B_2') y + (\lambda_3 C_1' + \lambda_4 C_2') z + \lambda_3 D_1' + \lambda_4 D_2' .\end{aligned}$$

Diese Identität kann für alle möglichen Werte von x, y, z nur bestehen, wenn die $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ den Gleichungen genügen

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - \lambda_3 A_1' - \lambda_4 A_2' = 0$$

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 - \lambda_3 B_1' - \lambda_4 B_2' = 0$$

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - \lambda_3 C_1' - \lambda_4 C_2' = 0$$

$$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 - \lambda_3 D_1' - \lambda_4 D_2' = 0.$$

Aus diesen vier homogenen Gleichungen lassen sich aber stets die Verhältnisse der $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ bestimmen, da ihre Determinante in Folge der Voraussetzung, daß die beiden Geraden sich schneiden, 2 (1') verschwindet. Bezeichnet man mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ die Subdeterminanten jener Elemente einer Zeile in der Determinante der vier Gleichungen, die mit den α gleiche Indices haben, so ist

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4$$

Die Substitution der sich hieraus ergebenden Werte von $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, oder $\frac{\lambda_3}{\lambda_4}$ liefert dann die Gleichung der gesuchten Ebene.

§ 24.

A u f g a b e n.

Da die Gerade durch zwei Gleichungen ausgedrückt wird, deren einfachste Form

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

ist und dieselben vier Constante m, n, p, q enthalten, so sind zur Bestimmung einer Geraden im Raume vier von einander unabhängige Bedingungsgleichungen notwendig. Wie wir sahen, liefert die Bedingung, daß eine Gerade zu einer Ebene parallel oder zu einer anderen Geraden senkrecht sei, oder eine zweite schneide, je eine Bedingungsgleichung; daß sie durch einen gegebenen Punct gehe, in einer gegebenen Ebene liege, auf einer Ebene senkrecht stehe, einer anderen Geraden parallel sei, je zwei Bedingungsgleichungen. Somit ergeben sich die folgenden Aufgaben:

1) Die Gleichungen der Geraden aufzustellen, welche durch zwei gegebene Puncte geht.

Es seien x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der beiden gegebenen Puncte,

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

die gesuchten Gleichungen der Verbindungslinie dieser beiden Puncte. Die unbekannten Grössen m, n, p, q in diesen Gleichungen müssen aus der Bedingung bestimmt werden, daß die Gerade durch die beiden gegebenen Puncte gehe, also aus den Gleichungen

$$x_1 = mz_1 + p, \quad y_1 = nz_1 + q$$

$$x_2 = mz_2 + p, \quad y_2 = nz_2 + q,$$

woraus sich als die beiden Gleichungen der Geraden

$$\begin{vmatrix} x, & z, & 1 \\ x_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & z_2, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y, & z, & 1 \\ y_1, & z_1, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ergeben.

Mit dieser Aufgabe ist auch die andere gelöst:

Aus den Gleichungen einer Geraden in Ebenencoordinaten ihre Gleichungen in Punctcoordinaten zu finden. Und umgekehrt.

Denn die Gerade, welche durch die beiden Gleichungen in Ebenencoordinaten repräsentiert wird:

$Au + Bv + Cw + D = 0$ und $A'u + B'v + C'w + D' = 0$,
ist die Verbindungslinie der beiden Puncte

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A}{D}, & y_1 &= \frac{B}{D}, & z_1 &= \frac{C}{D} \\ x_2 &= \frac{A'}{D'}, & y_2 &= \frac{B'}{D'}, & z_2 &= \frac{C'}{D'}. \end{aligned}$$

Ist umgekehrt die Gerade durch zwei Gleichungen in Punctcoordinaten dargestellt, so repräsentieren die Gleichungen ihrer Durchschnittspuncte mit zwei Coordinatenebenen § 8 und § 15 dieselbe Gerade.

Wegen dieser leichten Transformirbarkeit der Gleichungen der Geraden aus Ebenen- in Punctcoordinaten, und umgekehrt, werden wir im Folgenden ihre Gleichungen zumeist in Punctcoordinaten voraussetzen und von dieser Voraussetzung nur dann abgehen, wenn es besondere Umstände — die zumal bei bloßen Lagebetrachtungen eintreten — erfordern.

2) Von einem gegebenen Puncte auf eine gegebene Ebene eine Normale zu fällen.

Es seien x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des gegebenen Punctes und

$$Ax + By + Cz = 0$$

die Gleichung der gegebenen Ebene. Nimmt man

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

als die Gleichungen der gesuchten Geraden an, so müssen die Constanten m, n, p, q den Gleichungen genügen

$$x_1 = mz_1 + p, \quad y_1 = nz_1 + q,$$

vermöge welcher p und q sich durch m und n ausdrücken lassen. Die beiden Gleichungen der Geraden erhalten durch diese Elimination die Gestalt

$$x - x_1 = m(z - z_1); \quad y - y_1 = n(z - z_1).$$

In Folge der Bedingung, daß die Gerade auf der Ebene senkrecht stehen soll, ist aber § 22

$$A = mC, \quad B = nC$$

und somit

$$x - x_1 = \frac{A}{C}(z - z_1), \quad y - y_1 = \frac{B}{C}(z - z_1),$$

oder

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$$

die Gleichungen der gesuchten Normale.

3) Von einem gegebenen Punkte eine Ebene senkrecht auf eine gegebene Gerade zu fällen.

Es seien x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des gegebenen Punktes und

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden.

Da die gesuchte Ebene durch den Punkt x_1, y_1, z_1 gehen soll, so hat ihre Gleichung die Form

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

wo die A, B, C erst den Bedingungen der Aufgabe gemäß zu bestimmen sind. Da nun die Ebene auf der Geraden senkrecht stehen soll, so sind die A, B, C durch die Gleichungen gegeben § 22

$$A : B : C = m : n : 1$$

und daher ist

$$m(x - x_1) + n(y - y_1) + (z - z_1) = 0$$

die Gleichung der gesuchten Ebene.

4) Die Gleichung der Ebene zu finden, welche durch eine gegebene Gerade geht und auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht.

Es sei $Ax + By + Cz + D = 0$

die Gleichung der gegebenen Ebene und

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

seien die Gleichungen der gegebenen Geraden.

Ist dann $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

die Gleichung der gesuchten Ebene, so unterliegen die Constanten A', B', C', D' den Bedingungsgleichungen [§ 23, Formel 2; § 12, 3]

$$A'm + B'n + C' = 0$$

$$A'p + B'q + D' = 0$$

$$A'A + B'B + C'C = 0.$$

Aus der Forderung, daß für jeden Punkt x, y, z der Ebene diese drei Gleichungen mit der obigen zusammen bestehen sollen, ergibt sich als Gleichung der gesuchten Ebene

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ m, & n, & 1, & 0 \\ p, & q, & 0, & 1 \\ A, & B, & C, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

5) Die Gleichung einer Ebene zu finden, die durch einen gegebenen Punkt und eine gegebene Gerade geht.

Es seien x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des gegebenen Punctes und

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden. Wird dann

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

als Gleichung der gesuchten Ebene angenommen, so bestehen zur Bestimmung der Constanten A, B, C, D die Gleichungen (§ 23, Formel 2)

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$Am + Bn + C = 0$$

$$Ap + Bq + D = 0.$$

Da diese drei Gleichungen mit der obigen vierten zusammen bestehen sollen, so ist die Gleichung der gesuchten Ebene

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ m, & n, & 1, & 0 \\ p, & q, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6) Es soll die Gleichung der Ebene aufgestellt werden, welche durch zwei gegebene Punkte geht und einer gegebenen Geraden parallel ist.

Es seien $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ die Coordinaten der gegebenen Punkte und

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden.

Ist dann $Ax + By + Cz + D = 0$

die Gleichung der gesuchten Ebene, so sind die Constanten A, B, C, D aus den Gleichungen zu bestimmen (§ 21)

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

$$Am + Bn + C = 0.$$

Damit nun diese drei Gleichungen mit der obigen zusammen bestehen können, muß die Determinante der vier Gleichungen verschwinden, also ist

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ m & n & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der gesuchten Ebene.

Ganz analog ist die Lösung, wenn statt der Coordinaten der beiden Punkte die Gleichungen ihrer Verbindungslinie gegeben sind. Es treten dann in den obigen Gleichungen bloß an Stelle der Bedingungsgleichungen, daß die beiden Punkte in der gesuchten Ebene liegen sollen, jene für die Incidenz einer Geraden und einer Ebene (§ 23, Formel 2).

7) Die Gleichung einer Ebene zu finden, die zwei gegebenen Geraden parallel ist und durch einen gegebenen Punkt geht.

Es seien $x = mz + p, \quad y = nz + q$

die Gleichungen der einen,

$$x = m'z + p', \quad y = n'z + q'$$

die Gleichungen der anderen Geraden, und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des gegebenen Punktes.

Stellt dann

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung der gesuchten Ebene dar, so bestehen zur Bestimmung der Constanten A, B, C, D die drei Gleichungen § 21

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$Am + Bn + C = 0$$

$$Am' + Bn' + C = 0.$$

Daraus erhält man in bekannter Weise als Gleichung der gesuchten Ebene

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ m & n & 1 & 0 \\ m' & n' & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

8) Die Gleichungen einer Geraden zu finden, welche zwei gegebenen Ebenen zugleich parallel ist und durch einen gegebenen Punkt geht.

Es sei

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung der einen,

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

die Gleichung der anderen Ebene, und x_1, y_1, z_1 seien die Coordinaten des gegebenen Punctes.

Da die Gerade durch diesen Punct gehen soll, so haben ihre Gleichungen die Form

$$x - x_1 = m(z - z_1); \quad y - y_1 = n(z - z_1).$$

Zur Bestimmung der Constanten m und n dienen die beiden Gleichungen (§ 21)

$$Am + Bn + C = 0, \quad A'm + B'n + C' = 0.$$

Da die gesuchte Gerade der Schnittlinie der beiden Ebenen parallel ist, so ist damit auch die Aufgabe gelöst:

Die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch einen gegebenen Punct geht und einer gegebenen Geraden parallel ist.

Denn jede der beiden Gleichungen der gegebenen Geraden stellt eine Ebene dar, zu welcher die gesuchte Gerade parallel ist.

9) Die Gleichungen der Geraden zu finden, welche durch einen gegebenen Punct geht und auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht.

Diese Aufgabe bedarf keiner weiteren Erörterung, da sich mittelst der vorhergehenden Aufgabe unmittelbar die Gleichungen zweier Ebenen bestimmen lassen, in denen die gesuchte Gerade liegt. Dieselbe ist nämlich sowohl in der Ebene enthalten, welche durch die gegebene Gerade und den Punct gelegt wird (Aufgabe 5), als auch in der Ebene, welche vom Puncte senkrecht zur gegebenen Geraden construirt wird (Aufgabe 3).

Sind daher

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des gegebenen Punctes, so sind die Gleichungen der Geraden

$$m(x - x_1) + n(y - y_1) + (z - z_1) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ m & n & 1 & 0 \\ p & q & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

10) Die Gleichungen der Geraden, welche auf zwei gegebenen Geraden zugleich senkrecht steht und den Abstand derselben zu finden.

Es seien $x = mz + p, \quad y = nz + q$
die Gleichungen der einen und

$$x = m'z + p', \quad y = n'z + q'$$

die Gleichungen der anderen Geraden.

1. Aus der Bemerkung, daß die gesuchte Gerade senkrecht steht auf der Ebene, welche beiden Geraden parallel ist, ergeben sich unmittelbar ihre Neigungswinkel gegen die Coordinatenachsen. Denn die Gleichung der Ebene, welche etwa durch die erste der beiden Geraden parallel der anderen gezogen wird, ist nach Aufgabe 6

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p & q & 0 & 1 \\ m & n & 1 & 0 \\ m' & n' & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, indem man diese Determinante nach den Elementen der letzten Colonne entwickelt:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & q & 0 \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnen daher α, β, γ die Winkel, welche die gesuchte Gerade bezüglich mit der X-, Y- und Z-Axe bildet, so sind dieselben nach § 20, 2 durch die Formeln gegeben:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{n - n'}{\sqrt{(m - m')^2 + (n - n')^2 + (mn' - m'n)^2}} \\ \cos \beta &= \frac{m - m'}{\sqrt{(m - m')^2 + (n - n')^2 + (mn' - m'n)^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{n'm - m'n}{\sqrt{(m - m')^2 + (n - n')^2 + (mn' - m'n)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1.)$$

Diese Formeln lassen noch einige Umwandlungen zu, indem man m, n, m', n' durch die Winkel ausdrücken kann, welche die beiden gegebenen Geraden mit den Axen einschließen. Bezeichnen λ, μ, ν die Winkel, welche die erste, λ', μ', ν' diejenigen, welche die zweite Gerade bezüglich mit der X-, Y- und Z-Axe bildet, so ist

$$m = \frac{\cos \lambda}{\cos \nu}, \quad n = \frac{\cos \mu}{\cos \nu},$$

$$m' = \frac{\cos \lambda'}{\cos \nu'}, \quad n' = \frac{\cos \mu'}{\cos \nu'},$$

somit

$$\begin{aligned} & \sqrt{(m - m')^2 + (n - n')^2 + (mn' - m'n)^2} \\ &= \frac{1}{\cos \nu \cos \nu'} \sqrt{[(\cos \lambda \cos \mu' - \cos \lambda' \cos \mu)^2 + (\cos \mu \cos \nu' - \cos \nu \cos \mu')^2 \\ & \quad + (\cos \lambda \cos \nu' - \cos \lambda' \cos \nu)^2]}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist aber nach § 4, 6 $\sin (g, g')$ wenn mit (g, g') der Winkel bezeichnet wird, den die beiden Geraden einschließen. Hieraus ergeben sich für α, β, γ die Formeln

$$\cos \alpha = \frac{\cos \lambda \cos \nu' - \cos \lambda' \cos \nu}{\sin (g, g')} ; \quad \cos \beta = \frac{\cos \mu \cos \nu' - \cos \nu \cos \mu'}{\sin (g, g')} ;$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos \lambda \cos \mu' - \cos \lambda' \cos \mu}{\sin (g, g')} .$$

Man ist nun (Aufgabe 6) im Stande, die Gleichungen der beiden Ebenen zu bestimmen, welche durch je eine der gegebenen Geraden gehen und die gesuchte Gerade enthalten. Ihr System repräsentiert somit die gesuchte Gerade.

2. Das zwischen den beiden Geraden enthaltene Stück dieser Geraden, die auf beiden zugleich senkrecht steht — der Abstand der beiden Geraden — ist offenbar gleich dem Abstände irgend eines Punktes der einen Geraden von der Ebene, welche ihr parallel durch die andere hindurchgelegt wird. Ist also x, y, z ein Punkt der zweiten Geraden, so ist § 12, 5 wenn d den Abstand der beiden Geraden bezeichnet,

$$d = - \frac{\begin{vmatrix} x & y & z \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & q & 0 \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(m - m')^2 + (n - n')^2 + (mn' - m'n)^2}} ,$$

wo die Wurzel jenes Zeichen erhält, welches den Ausdruck positiv macht, oder da

$$d = - \frac{\begin{vmatrix} m'z + p' & n'z + q' & z \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & q & 0 \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(m - m')^2 + (n - n')^2 + (mn' - m'n)^2}} .$$

Die erste der beiden Determinanten des Zählers kann man nun in die Summe zerlegen:

$$\begin{vmatrix} m'z & n'z & z \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p' & q' & 0 \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix} .$$

In dieser verschwindet aber die erste Determinante, da die gleichstelligen Elemente ihrer ersten und letzten Zeile sich nur um einen gemeinsamen Factor von einander unterscheiden. Es ist somit

$$d = - \frac{\begin{vmatrix} p' & q' & 0 \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & q & 0 \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(m - m')^2 + (n - n')^2 + (mn' - m'n)^2}} ,$$

$$d = \frac{(p - p')(n - n') - (q - q')(m - m')}{\sqrt{(m - m')^2 + (n - n')^2 + (mn' - m'n)^2}} .$$

Dies ist nun der gesuchte Ausdruck für den Abstand der beiden Geraden. Die Wurzel erhält darin das Zeichen, welches den Ausdruck positiv macht.

3. Durch eine kleine Transformation dieses Ausdruckes ergibt sich der aus der Elementar-Geometrie bekannte Satz, daß der Abstand der beiden Geraden auch ihre kürzeste Entfernung ist.

Zu diesem Behufe führen wir statt der Größen p, q, p', q' , welche die Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Geraden mit der (XY) -Ebene sind, die Coordinaten irgend welchen Punctes jeder Geraden ein. Sind nun x, y, z die Coordinaten eines Punctes der ersten und x', y', z' die eines Punctes der zweiten Geraden, so geht durch die Substitution

$$\begin{aligned} p &= x - mz, & q &= y - nz \\ p' &= x' - m'z', & q' &= y' - n'z' \end{aligned}$$

die obige Formel über in

$$d = \frac{(x - x')(n - n') - (y - y')(m - m') + (mn' - m'n)(z - z')}{\sqrt{(m - m')^2 + (n - n')^2 + (mn' - m'n)^2}},$$

oder wegen (1.)

$$d = (x - x') \cos \alpha + (y - y') \cos \beta + (z - z') \cos \gamma.$$

Bezeichnet man nun mit r den Abstand der beiden Puncte x, y, z und x', y', z' , ferner mit ω, φ, ψ die Winkel, welche r bezüglich mit der X -, Y - und Z -Axe bildet, so ist

$$x - x' = r \cos \omega, \quad y - y' = r \cos \varphi, \quad z - z' = r \cos \psi.$$

Substituiert man diese Werte in dem Ausdrucke für d , so erhält man

$$d = r (\cos \alpha \cos \omega + \cos \beta \cos \varphi + \cos \gamma \cos \psi).$$

Der Coefficient von r in diesem Ausdrucke ist aber $\cos \vartheta$, wenn ϑ den Winkel bezeichnet, den die Geraden r und d mit einander einschließen. Es ist somit

$$d = r \cos \vartheta.$$

Diese Formel zeigt, daß man stets ein rechtwinkliges Dreieck construieren kann, in dem r die Hypothenuse, d eine Kathete und ϑ der ihr anliegende Winkel ist: also ist stets $d < r$, wie früher behauptet wurde.

11) Eine Ebene teilt den Winkel zweier Ebenen derart, daß die Sinus der Teile dieses Winkels in einem bekannten Verhältnisse zu einander stehen. Es ist die Beziehung zwischen den Gleichungen der Durchschnittspunkte dieser drei Ebenen mit einer gegebenen Geraden aufzufinden.

Es seien

$$U \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0; \quad V \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden;

$$E_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1; \quad E_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2$$

die Gleichungen der beiden Ebenen. Ist dann $-\lambda$ die Verhältnisszahl, in welcher die Sinus der Neigungswinkel dieser dritten Ebene $E_3 = 0$ gegen die beiden anderen Ebenen zu einander stehen, so ist

$$E_3 = E_1 + \lambda \varrho E_2, \text{ wo } \varrho = \sqrt{\frac{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \text{ (§ 12, 6) ihre Gleichung.}$$

Die Gleichung des Durchschnittspunctes dieser Ebene mit der Geraden, d. h. mit den sie darstellenden beiden Ebenen ist somit (§ 16)

$$\begin{vmatrix} u & , & v & , & w & , & 1 \\ a_1 & , & b_1 & , & c_1 & , & d_1 \\ a_2 & , & b_2 & , & c_2 & , & d_2 \\ A_1 + \lambda \varrho A_2 & , & B_1 + \lambda \varrho B_2 & , & C_1 + \lambda \varrho C_2 & , & D_1 + \lambda \varrho D_2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach einem bekannten Satze

$$\begin{vmatrix} u & , & v & , & w & , & 1 \\ a_1 & , & b_1 & , & c_1 & , & d_1 \\ a_2 & , & b_2 & , & c_2 & , & d_2 \\ A_1 & , & B_1 & , & C_1 & , & D_1 \end{vmatrix} + \lambda \varrho \begin{vmatrix} u & , & v & , & w & , & 1 \\ a_1 & , & b_1 & , & c_1 & , & d_1 \\ a_2 & , & b_2 & , & c_2 & , & d_2 \\ A_2 & , & B_2 & , & C_2 & , & D_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun ist aber

$$P_1 \equiv \begin{vmatrix} u & , & v & , & w & , & 1 \\ a_1 & , & b_1 & , & c_1 & , & d_1 \\ a_2 & , & b_2 & , & c_2 & , & d_2 \\ A_1 & , & B_1 & , & C_1 & , & D_1 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des Durchschnittspunctes der Geraden mit der Ebene E_1 und

$$P_2 \equiv \begin{vmatrix} u & , & v & , & w & , & 1 \\ a_1 & , & b_1 & , & c_1 & , & d_1 \\ a_2 & , & b_2 & , & c_2 & , & d_2 \\ A_2 & , & B_2 & , & C_2 & , & D_2 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des Durchschnittspunctes derselben mit der Ebene E_2 . Somit stellt sich die Gleichung des gesuchten Punctes in der Form dar:

$$P_1 + \lambda \varrho P_2 = 0.$$

Aus dieser Form der Gleichung des Durchschnittspunctes können wir eine sehr erhebliche Folgerung ziehen. Bezeichnen wir nämlich mit P_3 diesen Punct, so ist

$$\frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} = \lambda \varrho \begin{vmatrix} a_1 & , & b_1 & , & c_1 \\ a_2 & , & b_2 & , & c_2 \\ A_1 & , & B_1 & , & C_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & , & b_1 & , & c_1 \\ a_2 & , & b_2 & , & c_2 \\ A_2 & , & B_2 & , & C_2 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnen (31), (32) die Winkel, welche die Ebene $E_3 \equiv E_1 + \lambda E_2$ bezüglich mit E_1 und E_2 bildet, so ist § 12, 6

$$\frac{\sin (13)}{\sin (32)} = -\frac{\lambda}{\varrho},$$

somit ist

$$\frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} : \frac{\sin (13)}{\sin (32)} = C,$$

wo C blos von den Constanten der vier Gleichungen U, V, E_1 und E_2 abhängt. Schneidet daher eine vierte Ebene $E_4 = 0$, welche durch die Gerade $E_1 = 0, E_2 = 0$ geht, die Gerade $U = 0, V = 0$ in einem Punkte P_4 , so ist wiederum

$$\frac{P_1 P_4}{P_4 P_2} : \frac{\sin (14)}{\sin (42)} = C,$$

daher ist

$$\frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} : \frac{P_1 P_4}{P_4 P_2} = \frac{\sin (13)}{\sin (32)} : \frac{\sin (14)}{\sin (42)}.$$

Nennt man nun das links vom Gleichheitszeichen stehende Doppelverhältnis das der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und das rechtsstehende das der vier Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 , so drückt die Formel den Satz aus:

Schneiden vier Ebenen, welche durch dieselbe Gerade gehen, eine zweite Gerade, so ist das Doppelverhältnis der vier Ebenen gleich dem Doppelverhältnisse ihrer vier Durchschnittspunkte.

12) Einen ganz ähnlichen Satz erhält man, wenn man vier Ebenen, die durch eine Gerade gehen, durch eine fünfte Ebene schneidet.

Es sei

$$E \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung einer Ebene, die nicht durch den Durchschnitt der beiden Ebenen

$$E_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0; \quad E_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

hindurchgehe. Die Ebene $E_3 \equiv E_1 + \lambda E_2$ enthält, wie die Form ihrer Gleichung zeigt, die Durchschnittslinie der Ebenen $E_1 = 0, E_2 = 0$.

Wir wollen nun mittelst dieser Gleichungen die Winkel zu berechnen suchen, welche die Schnittlinien von E mit E_1, E_2 und E_3 unter einander bilden.

Zu dem Zwecke werden wir zunächst die Winkel, welche die einzelnen Schnittlinien mit den Axen einschließen, zu bestimmen suchen. Diese finden wir unmittelbar, wenn wir die Gleichungen jeder derselben auf ihre einfachste Form bringen, in der sie dann zwei Projectionsebenen der Geraden auf die Coordinatenebenen dar-

stellen. Wählen wir, wie im Vorhergehenden, hierzu die Projectionsebenen auf die (XZ) - und (YZ) -Ebene, so erhalten wir dieselben, indem wir aus den Gleichungen der Ebenen, um deren Schnittlinie es sich handelt, einmal y und das andere Mal x eliminieren.

Wir brauchen hierbei offenbar nur die Winkel zu berechnen, welche die Schnittlinie von E_3 und E mit den Axen bilden, da sich aus diesen Ausdrücken jene für die Schnittlinien von E mit E_1 und E_2 ergeben, indem darin λ bezüglich 0 und ∞ gesetzt wird. Für die Schnittlinie von E_3 und E erhalten wir aber

$$\begin{aligned} & [(AB_1 - A_1B) + \lambda (AB_2 - A_2B)] x + [(CB_1 - BC_1) \\ & + \lambda (CB_2 - BC_2)] z + [(DB_1 - BD_1) + \lambda (DB_2 - BD_2)] = 0 \\ & [(AB_1 - A_1B) + \lambda (AB_2 - A_2B)] x + [(AC_1 - A_1C) \\ & + \lambda (AC_2 - A_2C)] z + (AD_1 - A_1D) + \lambda (AD_2 - A_2D) = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man daher mit α , β , γ die Winkel, welche diese Gerade bezüglich mit der X -, Y - und Z -Axe einschließt, so ist

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{(BC_1 - CB_1) + \lambda (BC_2 - CB_2)} &= \frac{\cos \beta}{(AC_1 - A_1C) + \lambda (AC_2 - A_2C)} \\ &= \frac{\cos \gamma}{(AB_1 - A_1B) + \lambda (AB_2 - A_2B)}. \end{aligned}$$

Sind somit α_1 , β_1 , γ_1 die Winkel, welche die Schnittlinie von E_1 und E bezüglich mit der X -, Y - und Z -Axe bildet, so ist

$$\frac{\cos \alpha_1}{BC_1 - B_1C} = \frac{\cos \beta_1}{AC_1 - A_1C} = \frac{\cos \gamma_1}{AB_1 - A_1B} = \frac{1}{\varrho_1},$$

wo ϱ_1 wieder der Proportionalitätsfactor ist. Ebenso ist für die Winkel α_2 , β_2 , γ_2 , welche die Schnittlinie von E_2 und E bezüglich mit der X -, Y - und Z -Axe einschließt,

$$\frac{\cos \alpha_2}{BC_2 - CB_2} = \frac{\cos \beta_2}{AC_2 - A_2C} = \frac{\cos \gamma_2}{AB_2 - A_2B} = \frac{1}{\varrho_2}.$$

Hieraus ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \cos \alpha (\varrho_1 \cos \gamma_1 + \lambda \varrho_2 \cos \gamma_2) &= \cos \gamma (\varrho_1 \cos \alpha_1 + \lambda \varrho_2 \cos \alpha_2) \\ \cos \beta (\varrho_1 \cos \gamma_1 + \lambda \varrho_2 \cos \gamma_2) &= \cos \gamma (\varrho_1 \cos \beta_1 + \lambda \varrho_2 \cos \beta_2) \\ \cos \alpha (\varrho_1 \cos \beta_1 + \lambda \varrho_2 \cos \beta_2) &= \cos \beta (\varrho_1 \cos \alpha_1 + \lambda \varrho_2 \cos \alpha_2), \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \varrho_1 (\cos \alpha \cos \gamma_1 - \cos \alpha_1 \cos \gamma) &= -\lambda \varrho_2 (\cos \alpha \cos \gamma_2 - \cos \alpha_2 \cos \gamma) \\ \varrho_1 (\cos \alpha \cos \beta_1 - \cos \alpha_1 \cos \beta) &= -\lambda \varrho_2 (\cos \alpha \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta) \\ \varrho_1 (\cos \beta \cos \gamma_1 - \cos \beta_1 \cos \gamma) &= -\lambda \varrho_2 (\cos \beta \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma). \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun die Schnittlinie von E mit E_1 , E_2 , E_3 be-

züglich mit l_1, l_2, l_3 , so erhält man, indem man diese drei Gleichungen quadriert und addiert,

$$\left\{ \frac{\sin(l_1 l_3)}{\sin(l_3 l_2)} \right\}^2 = \left(\frac{\lambda \varrho_2}{\varrho_1} \right)^2,$$

oder da, wenn ϱ die bekannte Constante (§ 12, 6) bezeichnet,

$$\frac{\sin(13)}{\sin(32)} = -\frac{\lambda}{\varrho},$$

$$\left\{ \frac{\sin(l_1 l_3)}{\sin(l_3 l_2)} : \frac{\sin(13)}{\sin(32)} \right\}^2 = \left(\frac{\varrho \varrho_2}{\varrho_1} \right)^2.$$

Zieht man hieraus beiderseits die Wurzel, so hat man für dieselbe jenes Zeichen zu nehmen, welches $\frac{\varrho \varrho_2}{\varrho_1}$ positiv macht, wenn man sowohl die Neigungswinkel der Ebenen als auch der Geraden in demselben Sinne zählt. Aus dieser Bemerkung erhellt, daß, wenn E_4 eine vierte durch die Schnittlinie von E_1 und E_2 gehende Ebene ist, und sie E in der Geraden l_4 schneidet:

$$\frac{\sin(l_1 l_3)}{\sin(l_3 l_2)} : \frac{\sin(13)}{\sin(32)} = \frac{\sin(l_1 l_4)}{\sin(l_4 l_2)} : \frac{\sin(14)}{\sin(42)} = \pm \frac{\varrho \varrho_2}{\varrho_1},$$

oder

$$\frac{\sin(l_1 l_3)}{\sin(l_3 l_2)} : \frac{\sin(l_1 l_4)}{\sin(l_4 l_2)} = \frac{\sin(13)}{\sin(32)} : \frac{\sin(14)}{\sin(42)}.$$

Nennt man nun analog, wie § 12, 6 das links vom Gleichheitszeichen stehende Doppelverhältnis das Doppelverhältnis der vier Strahlen l_1, l_2, l_3, l_4 , so hat man den Satz:

Schneidet man vier Ebenen, die durch eine Gerade gehen, durch eine fünfte Ebene, so ist das Doppelverhältnis der vier Schnittlinien gleich dem der vier Ebenen.

13) Die Gleichungen der Geraden zu finden, welche vier gegebene Geraden schneidet.

Sind drei Gerade gegeben, so lassen sich offenbar unendlich viele Geraden ziehen, deren jede alle drei gegebenen Geraden schneidet. Wir finden nämlich eine solche Gerade, indem wir durch eine der drei gegebenen Geraden eine Ebene legen und die Schnittpunkte der letzteren mit den beiden anderen gegebenen Geraden verbinden.

Sind vier Gerade gegeben, so giebt es noch immer zwei reelle, imaginäre oder zusammenfallende Gerade, deren jede dieselben schneidet.

Es seien etwa

$$u x + v y + w z + 1 = 0 \text{ und } u' x + v' y + w' z + 1 = 0$$

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z + 1 = 0 \quad ,, \quad u'_1 x + v'_1 y + w'_1 z + 1 = 0$$

$$u_2 x + v_2 y + w_2 z + 1 = 0 \quad ,, \quad u'_2 x + v'_2 y + w'_2 z + 1 = 0$$

$$u_3 x + v_3 y + w_3 z + 1 = 0 \quad ,, \quad u'_3 x + v'_3 y + w'_3 z + 1 = 0$$

die Gleichungen der vier gegebenen Geraden.

Denken wir uns nun durch die gesuchte und die erste gegebene Gerade eine Ebene gelegt, so muß eine Constante λ auffindbar sein, durch welche die Gleichung derselben die Form erhält

$$(u + \lambda u')x + (v + \lambda v')y + (w + \lambda w')z + (1 + \lambda) = 0.$$

Die Ebene, die durch die gesuchte und die zweite gegebene Gerade gelegt wird, muß mittelst einer Constanten μ auf die Form gebracht werden können:

$$(u_1 + \mu u'_1)x + (v_1 + \mu v'_1)y + (w_1 + \mu w'_1)z + (1 + \mu) = 0.$$

Die Gleichungen der gesuchten Geraden sind somit gefunden, sobald wir aus den Bedingungen der Aufgabe die beiden Constanten λ und μ bestimmen. Diese Bestimmung ergibt sich unmittelbar aus der Forderung, daß die gesuchte Gerade auch die dritte und vierte der gegebenen Geraden schneiden soll. Denn damit sie die dritte Gerade schneide, müssen λ und μ die Gleichung befriedigen:

$$\begin{vmatrix} u + \lambda u', & v + \lambda v', & w + \lambda w', & 1 + \lambda \\ u_1 + \mu u'_1, & v_1 + \mu v'_1, & w_1 + \mu w'_1, & 1 + \mu \\ u_2, & v_2, & w_2, & 1 \\ u'_2, & v'_2, & w'_2, & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

damit sie die vierte Gerade schneide, müssen λ und μ überdies der Gleichung genügen

$$\begin{vmatrix} u + \lambda u'; & v + \lambda v'; & w + \lambda w'; & 1 + \lambda \\ u_1 + \mu u'_1; & v_1 + \mu v'_1; & w_1 + \mu w'_1; & 1 + \mu \\ u_3, & v_3, & w_3, & 1 \\ u'_3, & v'_3, & w'_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Es müssen also λ und μ einem Systeme zweier Gleichungen genügen, deren jede nach jeder dieser Größen linear ist. Die Elimination einer dieser Größen aus diesem Gleichungssysteme ergibt für die andern eine quadratische Gleichung. Je nachdem die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung reell und verschieden sind, oder zusammenfallen oder conjugiert imaginär sind, existieren zwei reelle oder zusammenfallende, oder zwei imaginäre Gerade, welche die Aufgabe lösen.

Fünftes Capitel.

§ 25.

Linienkoordinaten.

Im vorhergehenden Capitel sahen wir, daß die gerade Linie in doppelter Weise aufgefaßt werden kann: Entweder als von einem Punkte beschrieben, als ein Strahl, oder als von einer sich drehenden Ebene umhüllt, als eine Axe. Der ersten Auffassung entsprach die Darstellung der Geraden durch zwei lineare Gleichungen in Punct-, der letzteren die durch zwei lineare Gleichungen in Ebenencoordinaten.

In der ersten Auffassung können wir die gerade Linie am einfachsten durch die Gleichungen ihrer Projectionen auf zwei der drei Coordinatenebenen darstellen. Wir wählen in gewohnter Weise hierzu die Gleichungen der Projectionen auf die (XZ) - und (YZ) -Ebene:

$$x = mz + p, \quad y = nz + q, \quad (1.)$$

aus welchen durch Elimination des z sich die Gleichung der Projection auf die dritte Coordinatenebene (XY)

$$nx - my = np - mq$$

ergiebt.

Setzen wir der Kürze halber

$$np - mq \equiv r, \quad (2.)$$

so können wir die fünf Größen m, n, p, q, r als die fünf Coordinaten des Strahles betrachten, da irgend fünf Größen, welche der Identität (2.) genügen, eine Gerade bestimmen.

Ist nun ein Punct $x' y' z'$ des Strahles bekannt, so werden m, n, p, q, r durch die Ausdrücke dargestellt:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{x - x'}{z - z'}, & n &= \frac{y - y'}{z - z'}, \\ p &= \frac{x'z - xz'}{z - z'}, & q &= \frac{yz' - y'z}{z - z'}, & r &= \frac{xy' - x'y}{z - z'}, \end{aligned} \right\} (3.)$$

zwischen welchen wegen

$$r \equiv np - mq$$

die Identität besteht:

$$(x - x')(yz' - y'z) + (y - y')(x'z - xz') + (z - z')(xy' - x'y) = 0. \quad (4.)$$

Statt der obigen fünf können wir hier noch die folgenden sechs Ausdrücke als Coordinaten einer Geraden betrachten

$$\begin{aligned} &x - x', \quad y - y', \quad z - z', \\ &xy' - x'y; \quad x'z - xz'; \quad -(yz' - y'z), \end{aligned}$$

indem irgend sechs gegebene Gröſsen diesen Ausdrücken gleichgesetzt werden können, wenn sie die obige Identität (4) befriedigen, und also vermöge (3) einen Strahl bestimmen.

2. Fassen wir die Gerade als Axe auf, so können wir sie in der früheren Weise durch die Gleichungen ihrer Durchschnittspuncte mit zwei der drei Coordinatenebenen, etwa der (XZ) - und (YZ) -Ebene darstellen:

$$u = aw + b, \quad v = cw + d.$$

Aus diesen ergibt sich durch Elimination des w die Gleichung des Durchschnittspunctes der Geraden mit der (XY) -Ebene:

$$cu - av = bc - ad.$$

Setzen wir der Kürze halber

$$bc - ad \equiv e, \quad (5.)$$

so können wir in ganz analoger Weise, wie wir früher m, n, p, q, r als die fünf Coordinaten eines Strahles betrachteten, jetzt die fünf Gröſsen

$$a, b, c, d, e,$$

zwischen welchen die Identität (5.) besteht, als die fünf Coordinaten der als Axe aufgefaßten Geraden nehmen.

Sind nun u_1, v_1, w_1 die Coordinaten einer gegebenen durch die Axe gehenden Ebene, so liefern die Gleichungen für a, b, c, d, e die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{u - u_1}{w - w_1} & c &= \frac{v - v_1}{w - w_1} \\ b &= \frac{u_1 w - w_1 u}{w - w_1}; & d &= \frac{v w_1 - w v_1}{w - w_1}; & e &= \frac{u v_1 - v u_1}{w - w_1}, \end{aligned} \right\} \quad (6.)$$

welche wegen (5.) die Identität erfüllen

$$\begin{aligned} (u - u_1)(v w_1 - w v_1) + (v - v_1)(u w_1 - w_1 u) \\ + (w - w_1)(u v_1 - v u_1) \equiv 0. \end{aligned} \quad (7.)$$

Statt der obigen fünf können wir hiernach die folgenden sechs Ausdrücke als Coordinaten einer Axe annehmen

$$\begin{aligned} (u - u_1), (v - v_1), (w - w_1), \\ (u_1 w - w_1 u), (v w_1 - w v_1), (u v_1 - v u_1), \end{aligned}$$

da man von diesen sechs Gröſsen, zwischen welchen die Identität (7) herrscht, stets zu den ursprünglichen fünf Coordinaten der Geraden (6) zurückgehen kann.

3) Wir wollen nun den Zusammenhang suchen, in dem die vorher definierten Strahl- und Axencoordinaten derselben Geraden stehen. Sind x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Coordinaten zweier Puncte

der Geraden, u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 die Coordinaten zweier durch sie gehenden Ebenen, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 z_1 + 1 &= 0 \\ u_1 x_2 + v_1 y_2 + w_1 z_2 + 1 &= 0 \\ u_2 x_1 + v_2 y_1 + w_2 z_1 + 1 &= 0 \\ u_2 x_2 + v_2 y_2 + w_2 z_2 + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (8.)$$

Durch Subtraction der dritten von der ersten und der vierten von der zweiten Gleichung erhält man die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (u_1 - u_2) x_1 + (v_1 - v_2) y_1 + (w_1 - w_2) z_1 &= 0 \\ (u_1 - u_2) x_2 + (v_1 - v_2) y_2 + (w_1 - w_2) z_2 &= 0, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} (u_1 - u_2) : (v_1 - v_2) : (w_1 - w_2) &= \\ (z_2 y_1 - y_2 z_1) : (z_1 x_2 - x_1 z_2) : (y_2 x_1 - x_2 y_1) \end{aligned} \right\}. \quad (9.)$$

Da nun die obigen Gleichungen unverändert bleiben, wenn u, v, w respective mit x, y, z vertauscht wird, so ergibt sich aus dieser Relation

$$\left. \begin{aligned} (x_1 - x_2) : (y_1 - y_2) : (z_1 - z_2) &= \\ (w_2 v_1 - w_1 v_2) : (w_1 u_2 - w_2 u_1) : (v_2 u_1 - u_2 v_1) \end{aligned} \right\}. \quad (10.)$$

Aus der ersten und dritten, zweiten und vierten Gleichung in (8.) ergeben sich durch Elimination des x_1, x_2 :

$$\begin{aligned} (v_1 u_2 - v_2 u_1) y_1 + (w_1 u_2 - w_2 u_1) z_1 + (u_2 - u_1) &= 0 \\ (v_1 u_2 - v_2 u_1) y_2 + (w_1 u_2 - w_2 u_1) z_2 + (u_2 - u_1) &= 0, \end{aligned}$$

woraus durch Elimination von $(w_1 u_2 - w_2 u_1)$ folgt:

$$\frac{u_1 - u_2}{y_1 z_2 - y_2 z_1} = \frac{v_2 u_1 - u_2 v_1}{z_1 - z_2}.$$

Diese neue Proportion verbindet (9.) und (10.) und führt zur Relation

$$\begin{aligned} \frac{u_1 - u_2}{z_2 y_1 - z_1 y_2} &= \frac{v_1 - v_2}{z_1 x_2 - z_2 x_1} = \frac{w_1 - w_2}{y_2 x_1 - x_2 y_1} = \\ \frac{w_2 v_1 - w_1 v_2}{x_1 - x_2} &= \frac{w_1 u_2 - w_2 u_1}{y_1 - y_2} = \frac{v_2 u_1 - u_2 v_1}{z_1 - z_2}, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2) : (y_1 - y_2) : (z_1 - z_2) : (y_2 x_1 - x_2 y_1) : (z_1 x_2 - z_2 x_1) : (z_2 y_1 - z_1 y_2) \Big\} \\ = (w_2 v_1 - w_1 v_2) : (w_1 u_2 - w_2 u_1) : (v_2 u_1 - u_2 v_1) : (w_1 - w_2) : (v_1 - v_2) : (u_1 - u_2) \Big\}. \end{aligned} \quad (11.)$$

Die Gleichheit dieser Verhältnisse drückt somit die Bedingungen aus, unter welchen die Strahl- und Axen-Coordinaten dieselbe Gerade darstellen. Gehen wir zu den fünf Coordinaten der Geraden zurück, so verwandelt sich (11.) in

$$m : n : 1 : r : p : -q = -d : b : e : 1 : c : a.$$

§ 26.

Der Liniencomplex des ersten Grades.

Ebenso wie wir die Punct- oder ^{Lin}Linienkoordinaten durch eine Gleichung mit einander verbinden und nach den Eigenschaften der Puncte forschen, deren Coordinaten diese Gleichung befriedigen, können wir auch die Linienkoordinaten durch eine Gleichung verknüpfen und nach den Eigenschaften der Geraden fragen, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen. Wir wollen nun jetzt, wie wir früher die lineare Gleichung in Punct- und Ebenencoordinaten untersuchten, die lineare Gleichung in Linienkoordinaten einer näheren Betrachtung unterziehen. Die Gesamtheit der Geraden, deren Coordinaten einer solchen linearen Gleichung genügen, wird ein Complex des ersten Grades oder ein linearer Complex genannt.

Nehmen wir als die allgemeine homogene Gleichung ersten Grades zwischen den sechs Strahlencoordinaten

$x - x_1; y - y_1; z - z_1; yz_1 - y_1z; x_1z - xz_1; xy_1 - x_1y$
die folgende:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) + D(yz_1 - y_1z) \\ + E(x_1z - xz_1) + F(xy_1 - x_1y) = 0, \quad (1.)$$

so constituirt die Gesamtheit der Geraden, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen, den allgemeinen linearen Complex.

Die Formeln § 25, 11 liefern die Darstellung desselben Complexes in den sechs homogenen Axencoordinaten

$u - u_1, v - v_1, w - w_1, vu_1 - uv_1, uw_1 - wu_1, wv_1 - vw_1$
und zwar:

$$D(u - u_1) + E(v - v_1) + F(w - w_1) + A(vw_1 - wv_1) \\ + B(wu_1 - uw_1) + C(uv_1 - vu_1) = 0. \quad (2.)$$

Wir gelangen also von der Gleichung eines linearen Complexes in Strahlen- zu seiner Gleichung in Axencoordinaten, indem wir A, B, C bezüglich mit D, E, F und die Punctcoordinaten x, y, z, x_1, y_1, z_1 bezüglich mit den Ebenencoordinaten u, v, w, u_1, v_1, w_1 vertauschen.

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) zwischen den homogenen Strahlen- und Axencoordinaten des Complexes erhalten wir als Gleichung desselben in den fünf Strahlencoordinaten: m, n, p, q, r (§ 25, 3):

$$Am + Bn + C - Dq + Ep + Fr = 0;$$

in den fünf Axencoordinaten: a, b, c, d, e (§ 25, 6)

$$Da + Ec + F - Ad + Bb + Ce = 0.$$

2) Entwickeln wir die Gleichungen (1.) und (2.) in der folgenden Weise

$$\left. \begin{aligned} (A + Fy_1 - Ez_1)x + (B - Fx_1 + Dz_1)y \\ + (C + Ex_1 - Dy_1)z - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.)$$

$$\left. \begin{aligned} (D + Cv_1 - Bw_1)u + (E - Cu_1 + Aw_1)v \\ + (F + Bu_1 - Av_1)w - (Du_1 + Ev_1 + Fw_1) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.)$$

so ergibt sich hieraus leicht die Bestimmung der Strahlen des durch die Gleichungen (1.) und (2.) dargestellten Complexes.

Wir lassen in (1.) die x_1, y_1, z_1 alle Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ durchlaufen und bestimmen vermöge der Gleichung die Strahlen des Complexes, welche jedem der einzelnen Werttripel zukommen. Um diese zu erhalten, haben wir in (1.) x_1, y_1, z_1 die angenommenen Werte beizulegen, die Verbindungslinie des Punctes x_1, y_1, z_1 mit jedem Puncte x, y, z , dessen Coordinaten der Gleichung (3.) genügen, stellt dann einen Complexstrahl dar. Die Puncte x, y, z der Complexstrahlen, welche durch den Punct x_1, y_1, z_1 hindurchgehen, erfüllen somit, wie diese Gleichung lehrt, eine bestimmte Ebene, die selbstverständlich durch diesen Punct hindurchgeht, wie denn auch ihre Gleichung durch die Coordinaten x_1, y_1, z_1 befriedigt wird. Es liegen also die unendlich vielen Complexstrahlen, welche durch einen Punct des Raumes hindurchgehen, in einer bestimmten Ebene, die selbst den Punct enthält.

Das reciproke Verfahren ergibt sich aus Gleichung (2.) und (4.) und es lehrt also alle in einer Ebene liegenden Complexstrahlen bestimmen.

Jeder Werttripel u_1, v_1, w_1 bestimmt eine Ebene, und die Schnittlinie derselben mit jeder Ebene, deren Coordinaten u, v, w der Gleichung genügen, ist ein Strahl des Complexes. Da nun bei constanten u_1, v_1, w_1 alle Ebenen, deren Coordinaten die Gleichung (4.) befriedigen, einen Punct umhüllen (§ 12), so gehen auch alle in der Ebene u_1, v_1, w_1 liegenden Complexstrahlen durch diesen Punct. Die unendlich vielen Complexstrahlen, die in einer Ebene liegen, schneiden sich somit in einem Puncte derselben.

Es ergibt sich auf diese Weise der Doppelsatz:

Durch jeden Punct des Raumes gehen unendlich viele Strahlen des Complexes, welche alle in einer Ebene liegen.	In jeder Ebene liegen unendlich viele Strahlen des Complexes, welche sich alle in einem Puncte schneiden.
---	---

Hiernach ist durch den Complex jedem Puncte des Raumes eine bestimmte durch ihn gehende Ebene, und jeder Ebene des Raumes ein bestimmter in ihr gelegener Punct zugewiesen.

Der Zusammenhang zwischen den Coordinaten eines Punctes und

seiner entsprechenden Ebene des Complexes geben die Gleichungen (3.) und (4.). Wir finden daraus, wenn wir mit x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punctes und mit u_1, v_1, w_1 die seiner entsprechenden Ebene bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{D + Cv_1 - Bw_1}{Du_1 + Ev_1 + Fw_1} \\ y_1 &= -\frac{E + Cu_1 + Aw_1}{Du_1 + Ev_1 + Fw_1} \\ z_1 &= -\frac{F + Bu_1 - Av_1}{Du_1 + Ev_1 + Fw_1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u_1 &= -\frac{A + Fy_1 - Ez_1}{Ax_1 + By_1 + Cz_1} \\ v_1 &= -\frac{B - Fx_1 + Dz_1}{Ax_1 + By_1 + Cz_1} \\ w_1 &= -\frac{C + Ex_1 - Dy_1}{Ax_1 + By_1 + Cz_1} \end{aligned} \quad (5.)$$

§ 27.

Fortsetzung.

Durchläuft nun der Punct x_1, y_1, z_1 in (5.) eine Gerade, genügen also seine Coordinaten bei jeder Lage desselben einem Systeme zweier linearen Gleichungen, so befriedigen auch die Coordinaten der entsprechenden Ebene des Complexes stets zwei lineare Gleichungen und es dreht sich daher dieselbe um eine bestimmte Gerade.

Und reciprok: Dreht sich die Ebene u_1, v_1, w_1 um eine Gerade, genügen also ihre Coordinaten in jeder Lage einem Systeme zweier linearen Gleichungen, so befriedigen auch die Coordinaten des entsprechenden Punctes im Complex zwei lineare Gleichungen und es durchläuft somit der Punct eine bestimmte Gerade.

Nennen wir diese beiden Geraden, die sich demnach reciprok entsprechen, zwei conjugierte Polaren in Beziehung auf den Complex, so folgt aus dem Vorhergehenden:

Jede Gerade des Raumes hat in Bezug auf den Complex eine conjugierte Polare. Durchläuft ein Punct die eine, so umhüllt dessen entsprechende Ebene die andere; dreht sich eine Ebene um die eine, so beschreibt der entsprechende Punct die andere Polare.

Da jede Ebene des Complexes durch ihren entsprechenden Punct geht, und jede Polare die entsprechenden Puncte der Ebenen enthält, welche ihre conjugierte umhüllen, so schneidet jede Ebene, welche durch die eine Polare hindurchgeht, die andere in ihrem entsprechenden Puncte. Nun sind aber alle Strahlen, welche von einem Puncte in seiner entsprechenden Ebene gezogen werden, Complexstrahlen, somit:

Jede Gerade, welche zwei conjugierte Polaren schneidet, ist ein Strahl des Complexes.

Da die einem Puncte eines Complexstrahles entsprechende Ebene immer durch denselben hindurchgeht, so folgt:

Jeder Complexstrahl fällt mit seiner conjugierten Polare zusammen.

Die eben entwickelten Sätze ermöglichen es, eine geometrische Construction des Strahlencomplexes aufzufinden. Da die Gleichung des Complexes fünf von einander unabhängige Constanten enthält, so sind zur Bestimmung derselben fünf von einander unabhängige Gleichungen notwendig. Dieselben erhält man, wenn z. B. fünf Gerade gegeben sind mit der Bestimmung, daß sie Strahlen des Complexes sein sollen, denn die Coordinaten jeder dieser fünf Geraden müssen dann der Gleichung des Complexes genügen, und es ergeben sich hieraus somit zur Berechnung der Constanten des Complexes fünf lineare Gleichungen.

Mittelst irgend vier Geraden eines Complexes lassen sich nun zwei conjugierte Polaren in Bezug auf denselben bestimmen; es sind dies nämlich die beiden Geraden, deren jede die vier gegebenen schneidet. Denn schneidet eine Gerade vier Complexstrahlen, so liegt der entsprechende Punct jeder Ebene, welche durch sie und einen der vier Strahlen hindurchgelegt wird, sowohl auf der conjugierten Polare, als auch auf dem Strahle selbst: somit schneidet die conjugierte Polare gleichfalls alle vier Strahlen. Vermöge zweier conjugierter Polaren können wir aber unendlich viele Complexstrahlen construieren, da jede Gerade, welche dieselben schneidet, ein Complexstrahl ist. Sind daher fünf Complexstrahlen gegeben, so liefert jede Combination derselben zu vieren stets zwei conjugierte Polaren des Complexes und dem entsprechend eine unendliche Anzahl neuer Complexstrahlen. Indem wir so fortfahrend die gefundenen Strahlen zur Bildung neuer Combinationen zu je vier verwenden, können wir immer neue Complexstrahlen auffinden.

Auf diese Weise können wir also aus den fünf gegebenen eine beliebige Anzahl Complexstrahlen construieren. Wir können aus ihnen auch zu jedem Puncte die entsprechende Ebene und zu jeder Ebene den entsprechenden Punct finden. Denn bestimmen wir durch dieselben zwei Paare conjugierter Polaren, so lassen sich leicht zwei Complexstrahlen construieren, welche durch den gegebenen Punct gehen oder in der gegebenen Ebene liegen. Es sind dies im ersten Falle die beiden Geraden, deren jede durch den Punct geht und eines der Paare conjugierter Polaren schneidet; im zweiten Falle die Geraden, deren jede die Durchschnittspunkte der Ebene mit einem Paare conjugierter Polaren verbindet.

§ ~~28~~ 27⁶

Ein specieller Liniencomplex.

Aus der allgemeinen Gleichung des Complexes ergeben sich für gewisse Annahmen ihrer Constanten specielle Arten, von denen wir

hier aber nur eine einzige, deren Erwähnung uns später von Nutzen sein wird, ableiten wollen.

Wir können die Gleichungen des Complexes zwischen Strahlen-coordinaten (§ 26, 1) in der folgenden Weise entwickeln:

$$\left. \begin{aligned} (A + Fy - Ez) x_1 + (B - Fx + Dz) y_1 \\ + (C + Ex - Dy) z_1 - (Ax + By + Cz) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.)$$

Jeder der Coefficienten von x_1, y_1, z_1 gleich Null gesetzt, stellt eine Ebene dar, und die Determinante der drei Gleichungen dieser Ebenen verschwindet, da

$$\begin{vmatrix} 0, & F, & -E \\ -F, & 0, & D \\ E, & -D, & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Verschwindet daher auch noch die Determinante

$$\begin{vmatrix} A, & F, & -E \\ B, & 0, & D \\ C, & -D, & 0 \end{vmatrix} = D(AD + BE + CF),$$

was eintritt, wenn

$$AD + BE + CF = 0 \quad (2.)$$

ist, so schneiden sich die drei Ebenen in einer Geraden (§ 10). Die letztere Determinante ist aber die der Gleichungen der drei Ebenen $A + Fy - Ez = 0, B - Fx + Dz = 0, Ax + By + Cz = 0$.

Da aber auch $C + Ex - Dy = 0$

$$\begin{vmatrix} 0, & F, & A \\ -F, & 0, & B \\ A, & B, & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

ist, so schneiden sich daher auch diese drei Ebenen in einer Geraden. Unter der Voraussetzung (2.) gehen also die vier Ebenen

$$\left. \begin{aligned} A + Fy - Ez = 0, & \quad B - Fx + Dz = 0 \\ C + Ex - Dy = 0, & \quad Ax + By + Cz = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.)$$

durch dieselbe Gerade. Somit geht auch die Ebene (1.) durch diese Gerade, da für die Coordinaten eines Punctes derselben jeder Teil ihrer Gleichung verschwindet. Unter der Voraussetzung (2.) schneiden sich also alle Ebenen, die beliebigen Puncten entsprechen, in einer Geraden, welche durch irgend zwei der vier Gleichungen (3.) dargestellt wird.

Der reciproke Satz ergibt sich aus der Gleichung des Complexes in Axencoordinaten (§ 26, 2), wenn man dieselbe folgendermaßen ordnet

$$\left. \begin{aligned} (D + Cv - Bw) u_1 + (E - Cu + Aw) v_1 \\ + (F + Bu - Av) w_1 - (Du + Ev + Fw) = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1')$$

denn da

$$\begin{vmatrix} 0, & C, & -B \\ -C, & 0, & A \\ B, & -A, & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

ist, so verschwindet die Determinante der drei Punctgleichungen $D + Cv - Bw = 0$, $E - Cu + Aw = 0$, $F + Bu - Av = 0$. (2'.) Wird nun vorausgesetzt, daß $AD + BE + CF = 0$ sei, so verschwindet auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} D, & C, & -B \\ E, & 0, & A \\ F, & -A, & 0 \end{vmatrix} = A(AD + BE + CF),$$

und somit liegen die drei Puncte, deren Gleichungen (2'.), in einer Geraden, § 16. Diese letztere Determinante ist aber auch die der Gleichungen der drei Puncte

$$Du + Ev + Fw = 0, \quad E - Cu + Aw = 0, \quad F + Bu - Av = 0.$$

Da nun überdies

$$\begin{vmatrix} 0, & -E, & F \\ E, & 0, & A \\ F, & -A, & 0 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

so liegen auch diese drei Puncte in einer Geraden.

Es liegen somit unter der Voraussetzung (2.) die vier Puncte

$$\left. \begin{aligned} D + Cv - Bw = 0, & \quad E - Cu + Aw = 0, \\ F + Bu - Av = 0, & \quad Du + Ev + Fw = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3'.)$$

in einer Geraden. Auf dieser Geraden liegt auch jeder Punct, der durch die Gleichung (1'.) dargestellt wird. Denn die Coordinaten u , v , w jeder Ebene, welche durch die Gerade hindurchgeht, annullieren die einzelnen eingeklammerten Ausdrücke dieser Gleichung. Es liegen also alle Puncte, die beliebigen Ebenen entsprechen, auf einer Geraden.

In diesem speciellen Complexe gehen somit alle Ebenen, die beliebigen Puncten entsprechen, durch eine Gerade, und alle Puncte, die beliebigen Ebenen entsprechen, liegen auf einer Geraden. Die beiden Geraden fallen aber zusammen, wie ihre Gleichungen lehren. Denn die erste Gerade wird durch zwei der Gleichungen (3.) und die zweite durch zwei der Gleichungen (3'.) dargestellt. Transformiert man nun zwei Gleichungen, welche die erste Gerade bestimmen, aus Punct- in Ebenencoordinaten, oder zwei Gleichungen, welche die zweite Gerade darstellen, aus Ebenen- in Punctcoordinaten (§ 24, 1), so finden sich die beiden Gleichungen immer unter den vieren, welche die andere Gerade repräsentieren.

In dem speciellen Complexe, dessen Constanten in der Relation

$$AD + BE + CF = 0$$

stehen, schneiden alle Geraden des Complexes eine bestimmte Gerade, und alle Geraden, welche dieselbe schneiden, sind Strahlen des Complexes.

§ 28.^b

Die Congruenz zweier linearer Complexes.

Die Gesamtheit der Geraden, deren Coordinaten zwei linearen Gleichungen in Liniencoordinaten gleichzeitig genügen, die also den beiden durch diese Gleichungen dargestellten Complexen gemeinsam sind, nennen wir eine Congruenz. Auch die Geraden der Congruenz können wir als Strahlen oder Axen betrachten und dem entsprechend die Congruenz entweder durch das System der Gleichungen der beiden Complexes in Strahlen- oder Axencoordinaten darstellen. Sind nun

$$\Omega = 0, \quad \Omega' = 0$$

die Gleichungen der beiden Complexes in Strahlen-,

$$\Phi = 0, \quad \Phi' = 0$$

dieselben in Axencoordinaten, so befriedigen die Strahlencoordinaten jeder Geraden der Congruenz das System der beiden ersten und ihre Axencoordinaten das System der beiden letzten Gleichungen. Hieraus folgt unmittelbar, daß die Congruenz auch in jedem Complexes enthalten ist, der durch die Gleichung

$$\Omega + \lambda \Omega' = 0 \quad \text{oder} \quad \Phi + \lambda \Phi' = 0,$$

wo λ ein Parameter ist, dargestellt wird. Wir sagen, daß alle Complexes, welche sich aus diesen Gleichungen für die verschiedenen Werte des Parameters ergeben, und von welchen also je zwei die Congruenz bestimmen, eine zweigliederige Gruppe linearer Complexes bilden.

Aus der Definition der Congruenz ergeben sich unmittelbar zwei fundamentale Folgerungen, welche die geometrische Definition der Congruenz bilden.

Die Strahlen eines Complexes, welche durch einen Punct gehen, liegen in der dem Puncte entsprechenden Ebene. Bezüglich jedes von zwei Complexen entspricht nun dem Puncte eine durch ihn gehende Ebene, somit ist die Schnittlinie dieser beiden Ebenen ein beiden Complexen gemeinsamer Strahl, also eine Gerade der Congruenz.

Alle in einer Ebene liegenden Strahlen eines Complexes gehen durch den der Ebene entsprechenden Punct. Bestimmt man daher für jeden von zwei Complexen den entsprechenden Punct der Ebene, so ist die Verbindungslinie derselben ein beiden Complexen gemeinsamer Strahl, also eine Linie der Congruenz.

Durch jeden Punct des Raumes geht und in jeder Ebene des Raumes liegt eine und nur eine Gerade der Congruenz,

welche ^{bez.} bezüglich) die dem Puncte oder der Ebene entsprechende Linie der Congruenz genannt wird.

Dieser Satz findet seine Ergänzung in dem Umstande, daß alle Linien der Congruenz zwei bestimmte Gerade schneiden. Wir beweisen diese Behauptung, indem wir die Thatsache benutzen, daß die Congruenz, welche durch die zwei Complexe, deren Gleichungen in Strahlencoordinaten $\Omega = 0$ und $\Omega' = 0$ oder in Axencoordinaten bezüglich $\Phi = 0$ und $\Phi' = 0$ sind, durch das System je zweier ^{bestimmter} anderer Complexgleichungen dargestellt werden kann, die sich aus

$$\Omega + \lambda \Omega' = 0 \quad \text{oder} \quad \Phi + \lambda \Phi' = 0 \quad (1.)$$

für irgend welchen Wert von λ ergeben. Wir können nun das λ so wählen, daß die beiden Gleichungen, welche die Congruenz bestimmen, zwei speciellen Complexen angehören, wie wir sie in § 28 erörterten. Ist nämlich

$$\Omega \equiv A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) + D(yz_1 - y_1z) + E(x_1z - xz_1) + F(xy_1 - x_1y)$$

$$\Omega' \equiv A'(x - x_1) + B'(y - y_1) + C'(z - z_1) + D'(yz_1 - y_1z) + E'(x_1z - xz_1) + F'(xy_1 - x_1y),$$

also

$$\Phi \equiv D(u - u_1) + E(v - v_1) + F(w - w_1) + A(vw_1 - wv_1) + B(wu_1 - uw_1) + C(uv_1 - u_1v)$$

$$\Phi' \equiv D'(u - u_1) + E'(v - v_1) + F'(w - w_1) + A'(vw_1 - wv_1) + B'(wu_1 - uw_1) + C'(uv_1 - u_1v),$$

so ist jeder der beiden Complexe, dessen Gleichung aus (1.) erhalten wird, wenn wir für λ eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$(A + \lambda A')(D + \lambda D') + (B + \lambda B')(E + \lambda E') + (C + \lambda C')(F + \lambda F') = 0$$

nehmen, ein Complex der speciellen Art.

Es giebt also in der zweigliederigen Complexgruppe

$$\Omega + \lambda \Omega' = 0 \quad \text{oder} \quad \Phi + \lambda \Phi' = 0$$

zwei Complexe von der besonderen Art, daß in jedem die Complexstrahlen eine feste Gerade schneiden, und daß alle durch einen Punct derselben gehenden Geraden Strahlen des Complexes sind. Die Strahlen, welche beide Geraden schneiden, und nur diese sind somit zwei Complexen der Gruppe gemeinsam, also die Linien der Congruenz. Diese beiden festen Geraden werden die Directricen der Congruenz genannt.

Alle Geraden einer Congruenz schneiden die beiden Directricen derselben.

Hiernach ist die Gerade der Congruenz, welche einem gegebenen Puncte des Raumes entspricht, diejenige, welche durch den gegebenen

Punct geht und die beiden Directricen schneidet; die Gerade, welche einer Ebene entspricht, ist die Verbindungslinie der Durchschnittspuncte der Ebene mit den beiden Directricen.

§ 29.

Wir können nun die Frage nach der Gesammtheit der Strahlen stellen, welche drei linearen Complexen gemeinsam sind. Sind

$$\Omega = 0, \quad \Omega' = 0, \quad \Omega'' = 0$$

die Gleichungen derselben in Strahlen-, und

$$\Phi = 0, \quad \Phi' = 0, \quad \Phi'' = 0$$

in Axencoordinaten, so sind diese Geraden je drei Complexen gemeinsam, welche sich für beliebige Werte der Parameter λ und μ aus

$$\Omega + \lambda \Omega' + \mu \Omega'' = 0 \quad \text{oder} \quad \Phi + \lambda \Phi' + \mu \Phi'' = 0$$

ergeben. Wir sagen, daß sämtliche Complexe, deren Gleichung aus dieser für bestimmte Werte der Parameter hervorgeht, eine dreigliederige Complexgruppe bilden.

Zwischen den Coordinaten eines jeden Punctes, der einer den drei Complexen gemeinsamen Geraden angehört, besteht eine gewisse Relation, die im vorliegenden Falle nach jeder der drei Coordinaten des Punctes quadratisch ist. Man erhält dieselbe offenbar, indem man aus den drei Gleichungen der Complexe, welche wir uns durch die fünf Coordinaten der Geraden m, n, p, q, r dargestellt denken, und den drei Gleichungen

$$x = mz + p; \quad y = nz + q; \quad nx - my = np - mq \equiv r$$

die fünf Liniencoordinaten m, n, p, q, r eliminiert.

Ist

$$\Omega \equiv Am + Bn + C - Dq + Ep + Fr = 0,$$

$$\Omega' \equiv A'm + B'n + C' - D'q + E'p + F'r = 0,$$

$$\Omega'' \equiv A''m + B''n + C'' - D''q + E''p + F''r = 0,$$

so ergibt sich auf diese Weise die Gleichung für den geometrischen Ort der Puncte, die auf den allen drei Complexen gemeinsamen Geraden liegen, durch Elimination von m und n aus den drei Gleichungen:

$$m(A - Ez - Fq) + n(B + Dz + Fx) + C - Dy + Ex = 0$$

$$m(A' - E'z - F'q) + n(B' + D'z + F'x) + C' - D'y + E'x = 0$$

$$m(A'' - E''z - F''q) + n(B'' + D''z + F''x) + C'' - D''y + E''x = 0.$$

Die Endgleichung ist nach bekannten Regeln

$$\begin{vmatrix} A - Ez - Fy, & B + Dz + Fx, & C - Dy + Ex \\ A' - E'z - F'y, & B' + D'z + F'x, & C' - D'y + E'x \\ A'' - E''z - F''y, & B'' + D''z + F''x, & C'' - D''y + E''x \end{vmatrix} = 0.$$

Zerlegt man diese Determinante, da ihre Elemente Aggregate sind, in eine Summe von Determinanten, so geht die Gleichung über in:

$$\begin{vmatrix} A, & B + Dz + Fx, & C - Dy + Ex \\ A', & B' + D'z + F'x, & C' - D'y + E'x \\ A'', & B'' + D''z + F''x, & C'' - D''y + E''x \end{vmatrix} + y^2 \begin{vmatrix} F, & B, & D \\ F', & B', & D' \\ F'', & B'', & D'' \end{vmatrix} \\ - z^2 \begin{vmatrix} E, & D, & C \\ E', & D', & C' \\ E'', & D'', & C'' \end{vmatrix} + yz \left\{ \begin{vmatrix} E, & B, & D \\ E', & B', & D' \\ E'', & B'', & D'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F, & D, & C \\ F', & D', & C' \\ F'', & D'', & C'' \end{vmatrix} \right\} \\ - xz \begin{vmatrix} E, & F, & C \\ E', & F', & C' \\ E'', & F'', & C'' \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} E, & B, & C \\ E', & B', & C' \\ E'', & B'', & C'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} F, & B, & C \\ F', & B', & C' \\ F'', & B'', & C'' \end{vmatrix} = 0,$$

welche offenbar nach x, y, z vom zweiten Grade ist.

In derselben Weise ergibt sich die Gleichung dieses Ortes in Ebenencoordinaten, wenn aus den sechs Gleichungen

$$\Phi = 0, \quad \Phi' = 0, \quad \Phi'' = 0$$

$$u - aw = b; \quad v - cw = d; \quad cu - av = e$$

die fünf Größen a, b, c, d, e eliminiert werden. Dieselbe ist wieder nach Coordinaten u, v, w quadratisch.

§ 30.

Übungen.

1) Bewegt sich ein Punct in einer Ebene, so dreht sich die ihm entsprechende Ebene des Complexes um den der Ebene entsprechenden Punct.

Beschreibt der Punct x, y, z die Ebene

$$Mx + Ny + Pz + Q = 0,$$

so dreht sich seine Ebene um den Punct, dessen Gleichung ist § 26

$$\begin{aligned} & (-DQ + BP - CN)u + (-EQ + AP + CM)v \\ & + (-FQ + AN - BM)w + DM + EN + FP = 0. \end{aligned}$$

Seine Coordinaten ξ, η, ζ haben also die Werte

$$\xi = -\frac{D + C\frac{N}{Q} - B\frac{P}{Q}}{D\frac{M}{Q} + E\frac{N}{Q} + F\frac{P}{Q}}; \quad \eta = -\frac{E - C\frac{M}{Q} + A\frac{A}{P}}{D\frac{M}{Q} + E\frac{N}{Q} + F\frac{P}{Q}}; \\ \zeta = -\frac{F + B\frac{M}{Q} - A\frac{N}{Q}}{D\frac{M}{Q} + E\frac{N}{Q} + F\frac{P}{Q}},$$

und diese zeigen (§ 26), daß der Punct ξ, η, ζ der Ebene entspricht, deren Coordinaten $\frac{M}{Q}, \frac{N}{Q}, \frac{P}{Q}$ sind, also der Ebene, welche der Punct beschreibt.

2) Aus dem Begriff der conjugierten Polaren eines Complexes (§ 27) folgt, daß alle Polaren, welche Geraden ~~des Complexes~~ conjugiert sind, die der unendlich fernen Ebene angehören, durch den der unendlich fernen Ebene entsprechenden Punct hindurchgehen. Da nun parallele Ebenen sich in derselben Geraden der unendlich fernen Ebene schneiden, so ergibt sich hieraus:

Die Puncte, welche parallelen Ebenen entsprechen, liegen auf einer Geraden und alle diese Geraden, welche verschiedenen Systemen paralleler Ebenen zugehören, sind einander parallel. Eine Gerade, welche die entsprechenden Puncte paralleler Ebenen enthält, wird ein Durchmesser des Complexes und der Durchmesser und die ihn bestimmenden Ebenen einander zugeordnet genannt.

Die Durchmesser eines linearen Complexes sind einander parallel, und durch jeden Punct des Raumes geht einer derselben*).

Es ist nun die Richtung dieser Durchmesser zu bestimmen.

Die Gleichungen zweier parallelen Ebenen lassen sich stets auf die Form bringen:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0; \quad \alpha x + \beta y + \gamma z + \varepsilon = 0.$$

Sucht man die Gleichung in Punctcoordinaten der Verbindungslinie der entsprechenden Puncte der beiden Ebenen, so ergibt sich, wenn man mit λ, μ, ν die Winkel bezeichnet, welche dieselbe bezüglich mit der X-, Y- und Z-Axe bildet:

$$\cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu = D : E : F.$$

3) Den Durchmesser eines Complexes zu finden, welcher auf seiner zugeordneten Ebene senkrecht steht.

Sind wieder λ, μ, ν die Winkel, welche der Durchmesser bezüglich mit der X-, Y- und Z-Axe bildet und u, v, w die Coordinaten seiner zugeordneten Ebene, so wird die Bedingung des Senkrechtstehens durch die Gleichungen ausgedrückt (§ 23):

$$\cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu = u : v : w$$

also

$$u : v : w = D : E : F.$$

Den Durchmesser zu diesem System paralleler Ebenen findet man, indem man einen seiner Puncte bestimmt, da seine Richtung nach (2) bekannt ist. Sucht man nun den Punct, welcher der Ebene des Systems entspricht, die durch den Coordinaten-Anfangspunct geht, so ergeben sich für seine Coordinaten ξ, η, ζ die Werte

$$\xi = \frac{BF - CE}{D^2 + E^2 + F^2}; \quad \eta = \frac{CD - AF}{D^2 + E^2 + F^2}; \quad \zeta = \frac{AE - BD}{D^2 + E^2 + F^2}.$$

*) Die Verbindungslinie des Punctes mit dem der unendlich fernen Ebene entsprechenden Puncte.

Dieser Durchmesser wird die *Axe* und die auf ihr senkrechten Ebenen werden die *Hauptschnitte* des Complexes genannt. Die Gleichung des durch den Coordinaten-Anfangspunctes gehenden Hauptschnittes aufzustellen?

4) Die Gleichung des Complexes für seine *Axe* als eine Coordinatenaxe und einen Hauptschnitt als darauf senkrechte Coordinatenebene zu finden.

Soll die *Axe* des Complexes z. B. zur *Z-Axe* des Coordinatensystems werden, so müssen von den Winkeln λ, μ, ν in 3, $\lambda = \mu = 90^\circ$ und $\nu = 0^\circ$ sein. Es muß daher in der Gleichung des Complexes $D = E = 0$ sein. Da ferner der Punct, welcher der (XY) -Ebene entspricht, die als ein Hauptschnitt des Complexes vorausgesetzt, in der *Z-Axe* liegt, so ist in (3) $\xi = \eta = 0$, somit ist auch

$$A = B = 0.$$

Die Gleichung des Complexes nimmt also, wenn wir denselben auf seine *Axe* als *Z-Axe* und seinen Hauptschnitt als (XY) -Ebene beziehen, die Form an

$$(xy' - x'y) + k(z - z') = 0; \quad w - w' + k(uv' - u'v) = 0.$$

Ebenso erhalten wir für die Gleichung des Complexes, wenn wir denselben auf seine *Axe* als *Y-Axe* und einen seiner Hauptschnitte als (XZ) -Ebene beziehen:

$$(xz' - x'z) + k'(y - y') = 0; \quad v - v' + k'(u'w - w'u) = 0.$$

Es ist aber klar, daß $k' = k$ ist, denn y und z , y' und z' unterscheiden sich in beiden Gleichungen bloß durch die Bezeichnung.

Lassen wir also nach einander die *Y-* und *X-Axe* des Coordinatensystems mit der *Axe* des Complexes zusammenfallen und wählen wir den Hauptschnitt desselben zu der Coordinatenebene der beiden anderen Axen, so ist seine Gleichung bezüglich

$$\begin{aligned} (x'z - xz') + k(y - y') &= 0 & v - y' + k(u'w - w'u) &= 0 \\ (zy' - z'y) + k(x - x') &= 0 & u - u' + k(vw' - v'w) &= 0. \end{aligned}$$

Die Größe k wird der Parameter des Complexes genannt.

5) Ein Liniencomplex bleibt ungeändert, sowohl wenn derselbe parallel seiner *Axe* verschoben, als auch, wenn er um dieselbe gedreht wird.

Anl. Ergiebt sich unmittelbar aus den Gleichungen in (4).

6) In den Complexen einer zweigliederigen Gruppe entsprechen irgend einem Puncte Ebenen, die in derselben Geraden sich schneiden.

Folgt aus der Strahlgleichung des Complexes wegen des darin enthaltenen Parameters.

7) Diesem Satze steht reciprok gegenüber:

In den Complexen einer zweigliederigen Gruppe entsprechen irgend einer Ebene Puncte, die in derselben Geraden liegen.

Folgt aus der Axengleichung der zweigliederigen Complexgruppe.

8) Die durch irgend einen Punct gehenden Hauptschnitte der linearen Complexen einer zweigliederigen Gruppe $\Omega + \lambda \Omega' = 0$ schneiden sich in derselben Geraden.

Ergiebt sich aus 3 und 6.

Hieraus folgt:

9) Die Durchmesser aller Complexe einer zweigliederigen Gruppe sind derselben Ebene parallel.

10) Die Gleichung der Ebene aufzustellen, welcher die Durchmesser sämtlicher Complexe einer Congruenz parallel sind.

Aus (2)

$$\cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu = (D + \mu D') : (E + \mu E') : (F + \mu F')$$

folgt:

$$(EF' - E'F) \cos \lambda - (DF' - D'F) \cos \mu + (DE' - D'E) \cos \nu = 0$$

und es sind daher diese Durchmesser parallel der Ebene, deren Coordinaten u , v , w in der Beziehung stehen

$$u : v : w = (EF' - E'F) : -(DF' - D'F) : (DE' - D'E).$$

11) Es ist zu zeigen, daß wenn die den Durchmessern sämtlicher Complexe parallele Ebene zur (XY) -Ebene genommen wird, die Complexgleichungen $\Omega = 0$ und $\Omega' = 0$ sich vereinfachen, indem bezüglich F und F' daraus verschwinden. Wird überdies zum Coordinaten-Anfangspuncte der Durchschnittspunct dieser Ebene mit der Geraden

$$C + Ex - Dy = 0 \quad C' + E'x - D'y = 0$$

gewählt, so verschwinden in den Complexgleichungen auch C und C' . Hieraus folgt, daß die Z -Axe dieses Coordinatensystems von den Axen sämtlicher Complexe der zweigliederigen Gruppe geschnitten wird.

Die Gerade, welche von den Axen sämtlicher Complexe einer zweigliederigen Congruenz geschnitten wird, wird die Axe der Congruenz genannt.

12) Die Gleichung der Directricen einer Congruenz bezüglich des in (11) angegebenen Coordinatensystems aufzustellen.

Anl. Ist μ eine Wurzel der quadratischen Gleichung, welche die Parameter der beiden Complexe bestimmt, deren Axen die Directricen der Congruenz sind, so werden dieselben durch die Gleichungen bestimmt:

$$(A - Ez) + \mu (A' - E'z) = 0$$

$$(B + Dz) + \mu (B' + D'z) = 0$$

$$(Ex - Dy) + \mu (E'x - D'y) = 0.$$

2. Es sind die Durchschnittspuncte der Directricen mit der Z - und die Winkel, die sie mit der X -Axe unseres Coordinatensystems bilden, zu bestimmen.

Anl. Zu letzterem Zwecke leite man aus dem obigen Gleichungssystem die Gleichung ab:

$$\frac{Ex - Dy}{E'x - D'y} = \frac{Ax + By}{A'x + B'y}.$$

Der Punct, welcher auf der Z -Axe den Abstand der beiden Direc-

trizen halbiert, wird der Mittelpunkt der Congruenz, der halbe Abstand die Constante derselben genannt.

13) Welche Beziehung tritt zwischen den Constanten A, B, D, E und A', B', D', E' ein, wenn der Coordinaten-Anfangspunct in den Mittelpunkt der Congruenz verschoben wird? Die XY -Ebene dieses Systems heißt die Centralebene der Congruenz.

Halbieren gleichzeitig die X - und Y -Axe den Winkel der beiden Directricen, so ergeben sich zwischen den Coefficienten der beiden Complexe die Bedingungsgleichungen

$$A'D - AD' = 0, \quad B'E - BE' = 0.$$

Die X - und Y -Axe in der oben bestimmten Lage werden die Nebenaxen der Congruenz genannt.

Ist die Congruenz auf dieses Coordinatensystem bezogen, so ergibt sich für den Abstand d der beiden Directricen

$$d^2 = -\frac{AB}{DE} = -\frac{A'B'}{D'E'}$$

und für den Winkel ϑ , den dieselben mit der X -Axe bilden,

$$\tan \vartheta^2 = -\frac{AE}{BD} = -\frac{A'E'}{B'D'}.$$

14) Die beiden Complexe, deren Gleichungen bezogen auf das obige Coordinatensystem die Gestalt haben

$$\Omega_1 = Am + Bn + Dp - Eq = 0$$

$$\Omega'_1 = A'm + B'n + D'p - E'q = 0,$$

bilden die Congruenz $\Omega_1 + \mu \Omega'_1 = 0$, welche die conjugierte Congruenz von $\Omega + \mu \Omega' = 0$ genannt wird. Die beiden Congruenzen haben denselben Mittelpunkt, dieselbe Centralebene, dieselbe Hauptaxe und dieselben Nebenaxen; ebenso sind der Abstand der beiden Directricen von einander und die Winkel, welche sie mit einander bilden, gleich. Gehört aber in der ursprünglichen Congruenz die Directrix, welche die Z -Axe in $z = +d$ schneidet, dem Winkel $+\tan \vartheta$ an, so entspricht dieselbe in der conjugierten Congruenz dem Winkel $-\tan \vartheta$.

II. Abschnitt. Projectivische Geometrie.

Sechstes Capitel.

Die homogenen Coordinaten.

§ 31.

Punctcoordinaten.

Außer der bisher benutzten Bestimmungsweise eines Punctes und einer Ebene durch drei Coordinaten, ist im Laufe der Entwicklung der analytischen Geometrie eine andere in Verwendung gekommen, die überall, wo es sich um bloße Lagenbeziehungen handelt, erhebliche Vorteile gegen die erste bietet. Sie strebt vornehmlich an, die Gleichungen, welche die geometrischen Gebilde repräsentieren, homogen zu gestalten, um dadurch der analytischen Geometrie die Vorteile der Symmetrie zuzuwenden. Dies wird offenbar schon erreicht, wenn wir die bisher verwendeten Coordinaten als Brüche mit demselben Nenner darstellen, und sowohl die Zähler als die Nenner zu Coordinaten resp. der Ebenen oder des Punctes nehmen.

Wir drücken also nunmehr den Ort eines Punctes im Raume durch vier Coordinaten x, y, z, p aus und verstehen darunter vier Größen, deren Verhältnisse $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}$ die gewöhnlichen Cartesischen Coordinaten des Punctes darstellen.

Unter diesen Voraussetzungen bestimmen diese vier Coordinaten unzweideutig einen Punct; aber nicht umgekehrt sind durch die Lage des Punctes seine Coordinaten vollständig bestimmt, sondern bloß deren Verhältnisse zu einander. Demnach hat ein Punct unendlich viele Werte seiner Coordinaten, die aber alle in demselben bestimmten Verhältnisse zu einander stehen. Und umgekehrt, alle Systeme von Coordinaten, die in demselben Verhältnisse zu einander stehen, bestimmen ein und denselben Punct.

Diese Coordinaten sind die einfachsten homogenen Coordinaten und wir erhalten offenbar ein allgemeineres System derselben, wenn wir die Verhältnisse der vier homogenen Coordinaten nicht mehr den Cartesischen Coordinaten des Punctes selbst, sondern Quotienten mit

gleichen Nennern, gebildet aus vier von einander unabhängigen linearen Ausdrücken derselben, gleichsetzen. Denn daraus ergeben sich die Cartesischen Coordinaten als Quotienten linearer homogener Ausdrücke der neuen Coordinaten mit gleichem Nenner und die Substitution derselben macht daher jede Gleichung zwischen Cartesischen Coordinaten zu einer homogenen nach diesen vier linearen Ausdrücken und somit auch nach den neuen Coordinaten.

Wir wollen also unter den vier homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punctes Größen verstehen, welche mit dessen Cartesischen x, y, z durch die Verhältnisse zusammenhängen

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \\ (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) : (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) \\ : (a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3) : (a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4). \end{aligned}$$

Dieselben bestimmen unzweideutig einen Punct, da, wenn ihre Verhältnisse bekannt sind, auch drei Gleichungen zwischen den Cartesischen Coordinaten des Punctes gegeben sind und sich somit diese hieraus bestimmen lassen. Aber nicht umgekehrt sind durch die Lage eines Punctes dessen homogene Coordinaten gegeben, sondern blos deren Verhältnis zu einander. Demnach entsprechen einem Puncte unendlich viele Werte seiner homogenen Coordinaten, die aber alle in demselben bestimmten Verhältnisse zu einander stehen. Und umgekehrt: alle Wertsysteme der vier homogenen Coordinaten, die gleiche Verhältnisse zu einander haben, stellen denselben Punct dar. Mit Benutzung eines Proportionalitätsfactors ϱ können wir die obigen Verhältnisse durch die vier Gleichungen ersetzen:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ \varrho x_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ \varrho x_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \\ \varrho x_4 &= a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4. \end{aligned}$$

Da wir nun jeden der obigen linearen Ausdrücke, unter Veränderung seiner Coefficienten, mit einem beliebigen constanten Factor versehen dürfen, so können die homogenen Coordinaten durch vier Gleichungen von der Form definiert werden:

$$\left. \begin{aligned} \varrho x_1 &= k_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \frac{1}{d_1}) \\ \varrho x_2 &= k_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \frac{1}{d_2}) \\ \varrho x_3 &= k_3 (a_3 x + b_3 y + c_3 z + \frac{1}{d_3}) \\ \varrho x_4 &= k_4 (a_4 x + b_4 y + c_4 z + \frac{1}{d_4}) \end{aligned} \right\}, \quad \text{A. pag 113.} \quad (1.)$$

wo die Größen k_1, k_2, k_3, k_4 als willkürlich aber fest gewählt anzusehen sind. Die Constanten in diesen vier Gleichungen müssen jedoch einer gewissen Einschränkung unterworfen werden.

Damit nämlich mittelst dieser Gleichungen zu jedem Wertsysteme von x_1, x_2, x_3, x_4 der entsprechende Punkt gefunden, d. h. seine Cartesischen Coordinaten bestimmt werden können, ist es notwendig, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

nicht verschwinde, da nur in diesem Falle aus dem obigen Gleichungssysteme sich die vier Größen $\frac{x}{\varrho}, \frac{y}{\varrho}, \frac{z}{\varrho}, \frac{1}{\varrho}$ berechnen lassen.

Jede der vier Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \xi + d_1 &= 0 & a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \xi + d_2 &= 0 \\ a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \xi + d_3 &= 0 & a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 \xi + d_4 &= 0 \end{aligned}$$

stellt eine Ebene dar, welche vier Ebenen, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, sich auch nicht in einem Punkte schneiden, also die Seitenflächen eines Tetraeders bilden. Bezeichnet man nun mit p_1, p_2, p_3, p_4 die Perpendikel, welche von einem Punkte des Raumes x, y, z bezüglich auf die erste, zweite, dritte und vierte dieser Ebenen gefällt werden, so ist § 12, 5

$$\begin{aligned} p_1 &= - \frac{(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}; & p_2 &= - \frac{(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \\ p_3 &= - \frac{(a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3)}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}}; & p_4 &= - \frac{(a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4)}{\sqrt{a_4^2 + b_4^2 + c_4^2}}, \end{aligned}$$

wo die Zeichen der Wurzeln in der bekannten Weise zu nehmen sind. Daher erhalten wir für die Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \varrho x_1 &= k_1 p_1 \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}; & \varrho x_2 &= k_2 p_2 \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \\ \varrho x_3 &= k_3 p_3 \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}; & \varrho x_4 &= k_4 p_4 \sqrt{a_4^2 + b_4^2 + c_4^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.)$$

Da nun die hier vorkommenden Wurzelgrößen constant sind, so sind

$$\left. \begin{aligned} k_1 \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} &= \lambda_1; & k_2 \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} &= \lambda_2 \\ k_3 \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2} &= \lambda_3; & k_4 \sqrt{a_4^2 + b_4^2 + c_4^2} &= \lambda_4 \end{aligned} \right\}, \quad (3.)$$

ebenso wie die k_1, k_2, k_3, k_4 beliebige constante, aber festgewählte Größen und die Gleichungen

$$\varrho x_1 = \lambda_1 p_1, \quad \varrho x_2 = \lambda_2 p_2, \quad \varrho x_3 = \lambda_3 p_3, \quad \varrho x_4 = \lambda_4 p_4 \quad (4.)$$

ergeben für die homogenen Coordinaten die geometrische Definition:

Die homogenen Coordinaten eines Punctes sind vier Zahlen, welche sich verhalten wie die mit beliebigen, aber fest gewählten Constanten multiplicierten Abstände desselben von den vier Seitenflächen eines Tetraeders.

Aus dieser Definition erhellt unmittelbar, daß die Coordinaten der vier Ecken des Tetraeders bezüglich gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2 &= 0, & x_3 &= 0 \\ x_1 &= 0, & x_2 &= 0, & x_4 &= 0 \\ x_1 &= 0, & x_3 &= 0, & x_4 &= 0 \\ x_2 &= 0, & x_3 &= 0, & x_4 &= 0, \end{aligned}$$

während die jeweilige vierte Coordinate völlig unbestimmt bleibt. Denn die Perpendikel, welche sich von einer Ecke auf die in ihr sich schneidenden drei Tetraederflächen fallen lassen, haben den Wert Null.

Da von einer Kante des Tetraeders sich nur auf zwei Seitenflächen des Tetraeders Perpendikel fallen lassen, so sind die Puncte der sechs Kanten charakterisiert bezüglich durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2 &= 0; & x_1 &= 0, & x_3 &= 0; & x_1 &= 0, & x_4 &= 0, \\ x_2 &= 0, & x_3 &= 0; & x_2 &= 0, & x_4 &= 0; & x_3 &= 0, & x_4 &= 0, \end{aligned}$$

während jedesmal die beiden anderen Coordinaten unbestimmt bleiben, aber in jedem Puncte der Kante in einem bestimmten Verhältnisse zu einander stehen, welches die Gleichungen 4 ergeben.

Die Puncte einer Tetraederfläche endlich sind bezüglich durch die Gleichungen charakterisiert:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 0,$$

da für die Puncte einer solchen Fläche eines der Perpendikel Null ist.

§ 32.

Ebenencoordinaten.

In ganz analoger Weise, wie wir soeben den Begriff der homogenen Punctcoordinaten ableiteten, gelangen wir zum Begriffe der homogenen Ebenencoordinaten. Die einfachste Art derselben erhalten wir, wie schon bemerkt, indem wir die bisher verwendeten Coordinaten als Brüche mit demselben Nenner darstellen und sowohl die Zähler als den Nenner zu Coordinaten der Ebene bestimmen. Wir drücken also dann die Lage einer Ebene im Raume durch vier Coordinaten

u, v, w, q aus und verstehen darunter vier Gröfsen, deren Verhältnisse $\frac{u}{q}, \frac{v}{q}, \frac{w}{q}$ die gewöhnlichen Coordinaten der Ebenen darstellen.

Ein viel allgemeineres System homogener Coordinaten erhalten wir aber offenbar, wenn wir die Verhältnisse der homogenen Coordinaten nicht den früheren Ebenencoordinaten selbst, sondern Quotienten mit demselben Nenner aus linearen Ausdrücken, jeder dieser Ausdrücke etwa noch multipliciert mit einer beliebigen aber fest gewählten Constanten, gleichsetzen.

Wir verstehen also unter den homogenen Coordinaten einer Ebene vier Gröfsen u_1, u_2, u_3, u_4 , welche mit den gewöhnlichen Coordinaten u, v, w derselben durch die Verhältnisse zusammenhängen:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \\ \nu_1 (A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1) : \nu_2 (A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2) \\ : \nu_3 (A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3) : \nu_4 (A_4 u + B_4 v + C_4 w + D_4),$$

wo die $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ die beliebig aber festgewählten Constanten bedeuten.

Wie diese Relationen zeigen, bestimmen die vier Coordinaten unzweideutig eine Ebene, da durch sie ihre Verhältnisse und hiermit drei Gleichungen zwischen den Coordinaten der Ebenen u, v, w gegeben sind. Aus diesen lassen sich, sobald nur die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, die Gröfsen u, v, w stets berechnen. Es lassen sich aber nicht umgekehrt aus der Lage der Ebene, d. h. aus ihren Coordinaten u, v, w , ihre homogenen Coordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 bestimmen, sondern blofs deren Verhältnisse zu einander. Es entsprechen demnach einer Ebene unendlich viele Werte ihrer homogenen Coordinaten, die aber alle in demselben Verhältnisse zu einander stehen; und umgekehrt alle Wertsysteme der vier homogenen Ebenencoordinaten, die gleiche Verhältnisse zu einander haben, stellen dieselbe Ebene dar. Mittelst eines Proportionalitätsfactors können wir nun die obigen Verhältnisse durch das äquivalente Gleichungssystem ersetzen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma u_1 &= \nu_1 (A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1) \\ \sigma u_2 &= \nu_2 (A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2) \\ \sigma u_3 &= \nu_3 (A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3) \\ \sigma u_4 &= \nu_4 (A_4 u + B_4 v + C_4 w + D_4) \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

aus dem sich unmittelbar die Notwendigkeit, daß die Determinante nicht verschwinde, ergibt, da nur unter dieser Voraussetzung bei gegebenen homogenen Coordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 sich die vier Unbekannten $\frac{u}{\sigma}, \frac{v}{\sigma}, \frac{w}{\sigma}$ und $\frac{1}{\sigma}$ berechnen lassen, also die Lage der Ebene bestimmt werden kann.

Jede der vier Gleichungen

$$A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 = 0, \quad A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2 = 0$$

$$A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3 = 0, \quad A_4 u + B_4 v + C_4 w + D_4 = 0$$

stellt einen Punct dar, welche vier Puncte wegen der Voraussetzung, daß die Determinante nicht verschwinde, nicht alle in einer Ebene liegen und also die vier Ecken eines Tetraeders sind. Bezeichnen wir nun mit q_1, q_2, q_3, q_4 die Perpendikel, welche von den einzelnen Ecken auf eine Ebene gefällt werden, deren Coordinaten u, v, w sind, so ergeben sich die Ausdrücke § 18

$$q_1 = - \frac{A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1}{D_1 \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \quad q_2 = - \frac{A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2}{D_2 \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

$$q_3 = - \frac{A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3}{D_3 \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \quad q_4 = - \frac{A_4 u + B_4 v + C_4 w + D_4}{D_4 \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Daher erhalten wir für die homogenen Coordinaten die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma u_1 &= \nu_1 q_1 D_1 \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}; & \sigma u_2 &= \nu_2 q_2 D_2 \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\ \sigma u_3 &= \nu_3 q_3 D_3 \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}; & \sigma u_4 &= \nu_4 q_4 D_4 \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \end{aligned} \right\}, \quad (2')$$

woraus folgt

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = D_1 \nu_1 q_1 : D_2 \nu_2 q_2 : D_3 \nu_3 q_3 : D_4 \nu_4 q_4, \quad (3')$$

oder, wenn wir mit σ den Proportionalitätsfactor und mit $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ bezüglich die Constanten $\nu_1 D_1, \nu_2 D_2, \nu_3 D_3, \nu_4 D_4$ bezeichnen,

$$\sigma u_1 = \mu_1 q_1, \quad \sigma u_2 = \mu_2 q_2, \quad \sigma u_3 = \mu_3 q_3, \quad \sigma u_4 = \mu_4 q_4. \quad (4')$$

Da nun hierin die μ von derselben Beschaffenheit sind, wie die ν , so ergibt sich hieraus für die homogenen Ebenencoordinaten die Definition:

Die homogenen Coordinaten einer Ebene sind vier Zahlen, welche sich verhalten, wie die mit beliebigen, aber fest gewählten Constanten multiplicierten Abstände derselben von den vier Eckpuncten eines Tetraeders.

Hiernach sind also die Ebenen des Tetraeders bezüglich durch die Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, & u_2 &= 0, & u_3 &= 0 \\ u_1 &= 0, & u_2 &= 0, & u_4 &= 0 \\ u_1 &= 0, & u_3 &= 0, & u_4 &= 0 \\ u_2 &= 0, & u_3 &= 0, & u_4 &= 0 \end{aligned}$$

während der Wert der jeweiligen vierten Coordinate unbestimmt bleibt und nur nicht verschwinden darf.

Die Ebenen, die durch eine Kante des Tetraeders gehen, sind bezüglich durch die Gleichungen

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0; \quad u_1 = 0, \quad u_3 = 0; \quad u_1 = 0, \quad u_4 = 0;$$

$$u_2 = 0, \quad u_3 = 0; \quad u_2 = 0, \quad u_4 = 0; \quad u_3 = 0, \quad u_4 = 0,$$

die Ebenen, welche durch eine Ecke des Tetraeders gehen, bezüglich durch eine der Gleichungen

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = 0$$

charakterisiert.

§ 33.

Das Fundamentaltetraeder.

Nach dem Vorhergehenden haben wir der Bestimmung der Punkte und Ebenen mittelst homogener Coordinaten ein Tetraeder zu Grunde^{zu} legen, indem wir dann als die vier homogenen Coordinaten eines Punktes je vier Zahlen ansehen können, welche sich ebenso verhalten, wie die mit beliebigen aber festgewählten Constanten multiplicierten Abstände desselben von den vier Seitenflächen des Tetraeders und als die homogenen Coordinaten einer Ebene je vier Zahlen, die sich verhalten, wie die mit beliebigen aber festgewählten Constanten multiplicierten Abstände derselben von den vier Ecken des Tetraeders.

Dieses Tetraeder, welches der ganzen Coordinatenbestimmung zu Grunde liegt, wird das Fundamentaltetraeder genannt.

Sind nun

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0, \quad a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0$$

die Gleichungen der Seitenflächen des Tetraeders in Cartesischen Coordinaten, so sind die Gleichungen der ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte bezüglich:

$$A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 = 0, \quad A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2 = 0$$

$$A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3 = 0, \quad A_4 u + B_4 v + C_4 w + D_4 = 0,$$

wenn wir mit den großen Buchstaben die Minoren^{der Elemente} bezeichnen, welche in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

denselben kleinen Buchstaben und denselben Index besitzen.

*s. p. absol. wte!

Die homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punctes und u_1, u_2, u_3, u_4 einer Ebene hängen dann nach § 31 und 32 mit ihren gewöhnlichen Coordinaten x, y, z , und u, v, w durch die Gleichungen zusammen :

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= k_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z + 1) & \sigma u_1 &= v_1 (A_1 u + B_1 v + C_1 w + 1) \\ \varrho x_2 &= k_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z + 1) & \sigma u_2 &= v_2 (A_2 u + B_2 v + C_2 w + 1) \\ \varrho x_3 &= k_3 (a_3 x + b_3 y + c_3 z + 1) & \sigma u_3 &= v_3 (A_3 u + B_3 v + C_3 w + 1) \\ \varrho x_4 &= k_4 (a_4 x + b_4 y + c_4 z + 1) & \sigma u_4 &= v_4 (A_4 u + B_4 v + C_4 w + 1) \end{aligned}$$

wo die k und v ganz beliebige, aber fest gewählte Constante bezeichnen.

Den verschiedenen Wertsystemen der ~~k~~ und v entsprechen dann verschiedene Systeme homogener Coordinaten. Wählen wir nun

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 1,$$

so hängen die homogenen und gewöhnlichen Coordinaten durch die Gleichungen zusammen :

$$\left. \begin{aligned} \varrho x_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 & \sigma u_1 &= A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 \\ \varrho x_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 & \sigma u_2 &= A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2 \\ \varrho x_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 & \sigma u_3 &= A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3 \\ \varrho x_4 &= a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 & \sigma u_4 &= A_4 u + B_4 v + C_4 w + D_4 \end{aligned} \right\} \text{ (I.)}$$

und es müssen dann die Perpendikel vom Puncte auf die Tetraederflächen § 31 (3.) mit den Constanten

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}; & \lambda_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}; \\ \lambda_3 &= \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}; & \lambda_4 &= \sqrt{a_4^2 + b_4^2 + c_4^2}, \end{aligned}$$

und jene von den Tetraederecken auf eine Ebene § 32 (3') mit den Constanten

$$\mu_1 = D_1; \quad \mu_2 = D_2; \quad \mu_3 = D_3; \quad \mu_4 = D_4$$

multipliziert werden, um bezüglich die Verhältnisse der homogenen Coordinaten des Punctes und der Ebene darzustellen.

Von diesen homogenen Coordinaten eines Punctes und einer Ebene gelangen wir zu ~~ihnen~~ seinen gewöhnlichen durch Auflösung der Gleichungen (I), wodurch sich ergibt:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4}{D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4} & u &= \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4}{d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4} \\ y &= \frac{B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + B_4 x_4}{D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4} & v &= \frac{b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 + b_4 u_4}{d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4} \\ z &= \frac{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + C_4 x_4}{D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4} & w &= \frac{c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4}{d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4} \end{aligned} \right\} \text{ (II.)}$$

eliminiere $\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \\ A_3 & D_3 \\ A_4 & D_4 \end{vmatrix}$

Diese Gleichungen lehren uns eine wichtige Consequenz der oben ge-

troffenen Bestimmung über die Constanten k und v . Substituieren wir nämlich in $ux + vy + wz + 1$ für x, y, z und u, v, w die oben stehenden Ausdrücke (II.) in homogenen Coordinaten, und berücksichtigen wir, daß die großen Buchstaben die Subdeterminanten der gleichbezeichneten Elemente in

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

sind, so ergibt sich

$$ux + vy + wz + 1 = \frac{\sum_{i,k} (A_i a_k + B_i b_k + C_i c_k + D_i d_k) x_i u_k}{(D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4) (d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4)},$$

wo i und k alle Werte von 1 bis 4 zuzuerteilen sind. Somit ist nach bekannten Determinantensätzen:

$$R \frac{u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4}{(D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4) (d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4)}.$$

Liegt daher der Punct x, y, z , der die homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 besitzt, in der Ebene u, v, w , welche die homogenen Coordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 hat, so ist

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

und somit

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0.$$

Es drückt also diese Gleichung die Bedingung der vereinigten Lage des Punctes x_1, x_2, x_3, x_4 und der Ebene u_1, u_2, u_3, u_4 aus. Somit:

Betrachten wir in der Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

die x als variabel und die u als constant, so stellt dieselbe eine Ebene dar, deren homogene Coordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 sind; sehen wir hingegen darin die x als constant und die u als variabel an, so stellt sie einen Punct dar, dessen homogene Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 sind.

§ 34.

Fortsetzung.

Unter den linearen Gleichungen in homogenen Punctcoordinaten ist eine besonders merkwürdig, nämlich jene, deren linke Seite bei

der Transformation der homogenen in die gewöhnlichen Coordinaten den Nenner bildet, also die Gleichung

$$D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4 = 0.$$

Für alle Punkte dieser Ebene und nur für diese wird $x = \infty$, $y = \infty$, $z = \infty$; sie enthält also alle unendlich fernen Punkte des Raumes. Wir sehen somit, daß die Gesamtheit aller unendlich fernen Punkte des Raumes durch eine lineare Gleichung dargestellt wird und werden so auch von dieser Seite zur Einführung des Begriffs der unendlich fernen Ebene geführt. Wir drücken damit nur kurz die analytische Thatsache aus, daß die homogenen Coordinaten jedes Punktes, dessen Cartesische unendlich groß sind, der obigen nach den homogenen Coordinaten linearen Gleichung genügen müssen. Und umgekehrt, daß alle Punkte, deren homogene Coordinaten jener Gleichung genügen, unendlich große Cartesische Coordinaten besitzen.

Indem wir die eine Seitenfläche des Fundamentaltetraeders mit der unendlich fernen Ebene zusammenfallen lassen, können wir das Parallel-Coordinatensystem als einen speciellen Fall des Tetraedersystems darstellen: Zu diesem Behufe wollen wir zunächst der Definition der homogenen Punktcoordinaten eine scheinbar allgemeinere Fassung geben. Es seien L_1, L_2, L_3 und L_4 vier Richtungslinien im Raume, von denen keine drei in derselben Ebene liegen, und jede derselben werde einer Seitenfläche des Fundamentaltetraeders zugeordnet. Die Richtungslinie L_1 bilde mit der Seitenfläche $x_1 = 0$ den Winkel α_1 , L_2 mit $x_2 = 0$ den Winkel α_2 u. s. f. Bezeichnen dann l_1, l_2, l_3, l_4 die Längen der Geraden, welche von einem Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 parallel den vier Richtungslinien L_1, L_2, L_3, L_4 bis zu den entsprechenden Seitenflächen des Tetraeders gezogen werden, so gehen aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \lambda_1 p_1; & \varrho x_2 &= \lambda_2 p_2 \\ \varrho x_3 &= \lambda_3 p_3; & \varrho x_4 &= \lambda_4 p_4 \end{aligned}$$

die folgenden hervor:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= (\lambda_1 \sin \alpha_1) l_1; & \varrho x_2 &= (\lambda_2 \sin \alpha_2) l_2 \\ \varrho x_3 &= (\lambda_3 \sin \alpha_3) l_3; & \varrho x_4 &= (\lambda_4 \sin \alpha_4) l_4. \end{aligned}$$

Indem wir an der Bedeutung der Constanten λ festhalten, daß dieselben beliebige, aber festgewählte Constanten seien, ergeben sich zur Definition der homogenen Coordinaten die Gleichungen

$$\varrho x_1 = \lambda_1 l_1; \quad \varrho x_2 = \lambda_2 l_2; \quad \varrho x_3 = \lambda_3 l_3; \quad \varrho x_4 = \lambda_4 l_4,$$

worin die l_1, l_2, l_3, l_4 nicht mehr die Abstände des Punktes von den Tetraederflächen, sondern Längen auf den zu bestimmten Richtungslinien durch ihn gezogenen Parallelen bezeichnen.

Setzen wir nun fest, daß die eine der Constanten λ etwa λ_4 der

reciproke Wert des Abschnittes sei, welcher auf der zur Richtungslinie L_4 durch die Tetraederecke $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ von dieser und der gegenüberliegenden Seitenfläche begrenzt wird, so wird, wenn diese Seitenfläche $x_4 = 0$ ins Unendliche rückt,

$$\varrho x_4 = 1$$

und somit

$$\frac{x_1}{x_4} = \lambda_1 l_1; \quad \frac{x_2}{x_4} = \lambda_2 l_2; \quad \frac{x_3}{x_4} = \lambda_3 l_3.$$

Lassen wir daher ferner die übrigen drei Richtungslinien L_1, L_2, L_3 den im Endlichen liegenden drei Kanten des Tetraeders parallel sein und wählen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, so ist das Tetraedersystem in ein Parallel-Coordinatensystem übergegangen.

§ 35.

Liniencoordinaten.

Die eben behandelte Bestimmungsweise des Punctes und der Ebene durch homogene Coordinaten zieht auch die Einführung neuer Liniencoordinaten nach sich.

Wir verstanden im Vorhergehenden (§ 25) unter den Coordinaten einer Geraden, wenn wir dieselbe als Strahl uns durch zwei Puncte $x, y, z; x', y', z'$ bestimmt dachten, die sechs Ausdrücke:

$$x - x', \quad y - y', \quad z - z', \quad xy' - x'y, \quad x'z - xz', \quad yz' - y'z,$$

wenn wir sie als Axe zweier Ebenen, welche bezüglich die Coordinaten $u, v, w; u', v', w'$ besitzen, auffassten, die sechs Gröfsen:

$$u - u', \quad v - v', \quad w - w', \quad uv' - u'v, \quad u'w - uw', \quad vw - v'w.$$

Drücken wir nun die Cartesischen Coordinaten $x, y, z; x', y', z'$ jedes der beiden Puncte durch seine homogenen aus, so stellt sich jede der Differenzen

$$x - x', \quad y - y', \quad z - z', \quad xy' - x'y, \quad x'z - xz', \quad yz' - y'z$$

als ein Quotient dar, dessen Zähler eine homogene lineare Function der sechs Gröfsen

$$p_{12} = x_1 x_2' - x_2 x_1'; \quad p_{13} = x_1 x_3' - x_3 x_1'; \quad p_{14} = x_1 x_4' - x_4 x_1'$$

$$p_{23} = x_2 x_3' - x_3 x_2'; \quad p_{24} = x_2 x_4' - x_4 x_2'; \quad p_{34} = x_3 x_4' - x_4 x_3'$$

und deren gemeinschaftlicher Nenner

$$(D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4) (D_1 x_1' + D_2 x_2' + D_3 x_3' + D_4 x_4')$$

ist, wenn wir mit x_1, x_2, x_3, x_4 und x_1', x_2', x_3', x_4' die homogenen Coordinaten bezüglich des Punctes x, y, z und x', y', z' bezeichnen.

Analog ergibt sich jede der Differenzen:

$$u - u', \quad v - v', \quad w - w', \quad uv' - u'v, \quad u'w - uw', \quad vw - v'w$$

als ein Quotient, dessen Zähler eine homogene lineare Function der sechs Größen

$$q_{12} = u_1 u_2' - u_2 u_1', \quad q_{13} = u_1 u_3' - u_3 u_1', \quad q_{14} = u_1 u_4' - u_4 u_1'$$

$$q_{23} = u_2 u_3' - u_3 u_2', \quad q_{24} = u_2 u_4' - u_4 u_2', \quad q_{34} = u_3 u_4' - u_4 u_3'$$

und deren gemeinschaftlicher Nenner

$$(d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4) (d_1 u_1' + d_2 u_2' + d_3 u_3' + d_4 u_4')$$

ist, wenn wir die Coordinaten u, v, w und u', v', w' der beiden Ebenen bezüglich durch ihre homogenen Coordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 und u_1', u_2', u_3', u_4' ausdrücken.

Es verhalten sich somit die sechs Strahlencoordinaten einer Geraden, wie sechs bestimmte lineare homogene Ausdrücke der sechs Größen $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$, und ihre sechs Axencoordinaten wie sechs lineare homogene Ausdrücke der sechs Größen $q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{23}, q_{24}, p_{34}$.

Durch die Verhältnisse von fünf Strahlen- oder Axencoordinaten einer Geraden zur sechsten sind daher die Verhältnisse bezüglich der sechs Größen p oder q gegeben, und umgekehrt durch die Verhältnisse der sechs Größen p oder q sind auch die Verhältnisse der sechs Strahlen- oder Axencoordinaten einer Geraden und somit diese selbst bestimmt. *cf. pag 89.*

Die Verhältnisse der sechs aus den homogenen Coordinaten $x_1, x_2, x_3, x_4; x_1', x_2', x_3', x_4'$ zweier Punkte gebildeten Ausdrücke

$$p_{12} = x_1 x_2' - x_2 x_1'; \quad p_{13} = x_1 x_3' - x_3 x_1'; \quad p_{14} = x_1 x_4' - x_4 x_1'$$

$$p_{23} = x_2 x_3' - x_3 x_2'; \quad p_{24} = x_2 x_4' - x_4 x_2'; \quad p_{34} = x_3 x_4' - x_4 x_3'$$

bestimmen die Verbindungslinie dieser Punkte; und die Verhältnisse der sechs aus den Coordinaten $u_1, u_2, u_3, u_4; u_1', u_2', u_3', u_4'$ zweier Ebenen gebildeten Ausdrücke

$$q_{12} = u_1 u_2' - u_2 u_1'; \quad q_{13} = u_1 u_3' - u_3 u_1'; \quad q_{14} = u_1 u_4' - u_4 u_1'$$

$$q_{23} = u_2 u_3' - u_3 u_2'; \quad q_{24} = u_2 u_4' - u_4 u_2'; \quad q_{34} = u_3 u_4' - u_4 u_3'$$

bestimmen die Schnittlinien dieser Ebenen.

Wir können daher die sechs Größen p als die Bestimmungsstücke eines Strahles und die sechs Größen q als die einer Axe betrachten.

Sowohl zwischen den sechs Strahlencoordinaten p , als den sechs Axencoordinaten q einer Geraden besteht eine Identität, welche jener zwischen den gewöhnlichen Strahlen- oder Axencoordinaten entspricht (§ 25) aus denen sie selbst hergeleitet wurden.

Wir erhalten dieselbe, indem wir jede der beiden identisch verschwindenden Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 \end{vmatrix} \equiv 0$$

nach dem La Place'schen Determinantensatze in ein Aggregat aus Producten zweigliedriger Determinanten auflösen. Es ergeben sich auf diese Weise die beiden Identitäten

$$p_{12}p_{34} + p_{31}p_{24} + p_{14}p_{23} \equiv 0, \quad q_{12}q_{34} + q_{31}q_{24} + q_{14}q_{23} \equiv 0, \quad (1.)$$

wo also $p_{ik} = x_i x'_k - x_k x'_i$, $q_{ik} = u_i u'_k - u_k u'_i$ ist.

Je sechs Gröfsen, p oder q , welche respective den Identitäten (1.) genügen, bestimmen somit eine Gerade, und wir können dann diese sechs Gröfsen p als die Coordinaten eines Strahles und die q als die Coordinaten einer Axe betrachten.

§ 36.

Fortsetzung.

Die eben definierten Strahlen- und Axencoordinaten haben auch eine einfache geometrische Bedeutung, aus der die Zweckmäßigkeit ihrer Wahl noch klarer hervorgehen wird.

Es sind nämlich die Strahlencoordinaten p die Coefficienten in den homogenen Gleichungen der Ebenen, welche die Gerade von den Eckpunkten des Tetraeders aus projicieren, und die Axencoordinaten q die Coefficienten in den homogenen Gleichungen der Durchschnittspuncte der Geraden mit den Tetraederflächen. Denn sind x_1, x_2, x_3, x_4 und x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 die homogenen Coordinaten zweier Puncte der Geraden, so müssen die homogenen Coordinaten $u_1, u_2, u_3, u_4 = 0$ der Ebene, welche durch diese beiden Puncte und die Ecke $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ hindurchgeht, die beiden Gleichungen befriedigen:

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 &= 0 \\ u_1 x'_1 + u_2 x'_2 + u_3 x'_3 &= 0. \end{aligned}$$

Daher ist

$$u_1 : u_2 : u_3 = p_{23} : -p_{13} : p_{12}.$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich das Verhältniß der Coordinaten der Ebene $v_1, v_2, v_3 = 0, v_4$, welche die Gerade aus der Ecke $x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$ projiciert:

$$v_1 : v_2 : v_4 = p_{24} : -p_{14} : p_{12} \text{ u. s. f.}$$

In ganz analoger Weise erhärtet man die Behauptung über die

Größen q . Sind nämlich u_1, u_2, u_3, u_4 die Coordinaten einer Ebene, welche durch die Gerade geht; u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 , die einer zweiten, so muß die Gleichung des Durchschnittspunctes der Geraden mit einer Tetraederfläche sowohl durch die Coordinaten dieser beiden Ebenen befriedigt werden, als auch einen Punct der betreffenden Tetraederfläche darstellen. Wollen wir etwa die Gleichung des Durchschnittspunctes der Geraden mit der Seitenebene $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$, so müssen die homogenen Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 = 0$ des Durchschnittspunctes den beiden Gleichungen genügen

$$u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$$

$$u'_1 \xi_1 + u'_2 \xi_2 + u'_3 \xi_3 = 0,$$

woraus sich ergibt

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = q_{23} : -q_{13} : q_{12}.$$

In der nämlichen Weise erhalten wir für die Coordinaten $\eta_1, \eta_2, \eta_3 = 0, \eta_4$ des Durchschnittspunctes der Geraden mit der Ebene $u_1 = 0, u_2 = 0, u_4 = 0$:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_4 = q_{24} : -q_{14} : q_{12} \text{ u. s. f.}$$

Aus dieser geometrischen Bedeutung unserer Strahlen- und Axen-coordinaten ist evident, daß ihre Verhältnisse unabhängig sind von der Wahl der beiden Puncte des Strahles oder Ebenen der Axen, die zur Bildung dieser Coordinaten verwendet werden. Diese Thatsache läßt sich auch leicht aus der Bildungsweise selbst unserer Coordinaten erkennen. Wir wollen dies nur für den Fall der Strahlencoordinaten darthun, da der Nachweis für die Axen-coordinaten sich bloß durch die Vertauschung des Wortes Punct mit Ebene hiervon unterscheidet.

Die Coordinaten jedes Punctes der Verbindungslinie unserer beiden Puncte x_1, x_2, x_3, x_4 und x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 lassen sich vermöge zweier Constanten λ und λ' in der Form darstellen

$$\lambda x_1 + \lambda' x'_1; \quad \lambda x_2 + \lambda' x'_2; \quad \lambda x_3 + \lambda' x'_3; \quad \lambda x_4 + \lambda' x'_4.$$

Bilden wir nun aus den Coordinaten dieses Punctes und des Punctes

$$\mu x_1 + \mu' x'_1; \quad \mu x_2 + \mu' x'_2; \quad \mu x_3 + \mu' x'_3; \quad \mu x_4 + \mu' x'_4$$

die Liniencoordinaten, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (\lambda x_i + \lambda' x'_i) (\mu x_k + \mu' x'_k) - (\lambda x_k + \lambda' x'_k) (\mu x_i + \mu' x'_i) \\ \equiv (\lambda \mu' - \lambda' \mu) p_{ik}. \end{aligned}$$

Es unterscheiden sich somit die aus den beiden letzten Puncten gebildeten Liniencoordinaten von den ursprünglichen um den constanten Factor $(\lambda \mu' - \lambda' \mu)$, was den Inhalt unserer Behauptung bildete.

Wenn also die sechs Coordinaten p oder q einer Geraden ge-

geben sind, so lassen sich stets Ebenen oder Punkte construieren, deren Durchschnittslinie respective Verbindungslinie die Gerade ist.

Auf diese Weise lassen sich alle Geraden construieren, deren Strahlen- oder Axencoordinaten einer gegebenen homogenen Gleichung in den Coordinaten der Geraden genügen und deren Gesamtheit wir im Vorhergehenden einen linearen Complex nannten*). Die Begriffe der linearen Congruenz und der Linienfläche bedürfen hiernach keiner weiteren Exposition.

§ 37.

Bei späteren Untersuchungen wird es häufig von Nutzen sein, die räumlichen Coordinaten eines Punktes einer Seitenebene des Fundamentaltetraeders zu ersetzen durch dessen Ebenencoordinaten in Bezug auf das in dieser Ebene gelegene Dreieck des Tetraeders als Fundamentaldreieck. Wir wollen daher den Zusammenhang aufsuchen, in dem diese Coordinaten des Punktes stehen.

Die Tetraederebene sei etwa die Ebene $x_4 = 0$. Die Raumcoordinaten des Punktes seien $x_1, x_2, x_3, x_4 = 0$ und seine ebenen Coordinaten für das Fundamentaldreieck, dessen Kanten die Geraden $x_1 = 0, x_4 = 0; x_2 = 0, x_4 = 0; x_3 = 0, x_4 = 0$ sind, seien bezüglich ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Wählen wir nun die Tetraederebene $x_4 = 0$ zur (XY) -Ebene des zu Grunde gelegten Cartesischen Coordinatensystems, so hängen die homogenen Raumcoordinaten irgend eines Punktes mit dessen Cartesischen durch die Formel zusammen

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ \varrho x_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ \varrho x_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \\ \varrho x_4 &= c_4 z. \end{aligned}$$

Speciell die eines Punktes der Tetraederebene $x_4 = 0$, welche zugleich für das Cartesische System die Ebene $z = 0$ ist, werden durch die x -, y -Coordinaten dieses Punktes also durch die Formeln ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= a_1 x + b_1 y + d_1; \quad \varrho x_2 = a_2 x + b_2 y + d_2; \\ \varrho x_3 &= a_3 x + b_3 y + d_3. \end{aligned}$$

*) Der lineare Complex wurde in § 26 durch eine homogene lineare Gleichung in den Strahlencoordinaten $x - x', y - y', z - z', xy' - x'y, x'z - xz', yz' - y'z$, oder in den Axencoordinaten $u - u', v - v', w - w', uv' - u'v, u'w - uw', vw' - v'w$ definiert. Verwandelt man diese Coordinaten bezüglich in die p - und q -Coordinaten, so erhält man für den Complex wieder eine lineare homogene Gleichung in diesen Coordinaten.

Die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 dieses Punctes hinwiederum sind nach § 8 durch die Gleichungen definiert:

$$\begin{aligned}\sigma \xi_1 &= a_1 x + b_1 y + d_1; & \sigma \xi_2 &= a_2 x + b_2 y + d_2; \\ \sigma \xi_3 &= a_3 x + b_3 y + d_3.\end{aligned}$$

Es unterscheiden sich daher die Raumcoordinaten x_1, x_2, x_3 des Punctes von seinen ebenen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 nur um einen gemeinsamen Factor. Sind daher die Raumcoordinaten eines Punctes einer Seitenfläche des Fundamentaltetraeders mit einander durch eine Gleichung verknüpft, so drückt dieselbe auch die Verbindung aus zwischen den ebenen Coordinaten dieses Punctes bezogen auf das in der Ebene gelegene Dreieck des Tetraeders als Fundamentaldreieck.

Ein ganz analoger Satz ergibt sich für den Zusammenhang der Coordinaten einer Ebene und den ebenen Liniencoordinaten der Durchschnittslinie derselben mit einer Seitenfläche des Fundamentaltetraeders für das in dieser Seitenfläche gelegene Dreieck desselben als Fundamentaldreieck.

Die Tetraederebene sei wieder die Ebene $x_4 = 0$, u seien die Coordinaten der Ebene und v die ebenen Coordinaten der Durchschnittslinie bezüglich derselben Ecke des Fundamentaltetraeders. Ist dann q der Abstand dieser Ecke von der Ebene, und q' der von der Geraden, so ist

$$\varrho u = q; \quad \sigma v = q'.$$

Da nun

$$q = q' \cos \alpha,$$

wenn α den Winkel bezeichnet, welchen die Ebene mit der Seitenfläche des Tetraeders einschließt, so ist

$$\omega u = v,$$

wo ω einen Proportionalitätsfactor bedeutet.

Es unterscheiden sich die ebenen Coordinaten der Durchschnittslinie einer Ebene mit einer Seitenfläche des Tetraeders, für das in dieser Seitenebene liegende Dreieck des Tetraeders als Fundamentaldreieck, von den Ebenencoordinaten, die den gleichen Ecken des Dreiecks zugehören, um einen gemeinsamen Factor.

§ 38.

Wie schon bemerkt, werden diese homogenen Coordinaten nur bei Betrachtungen über Lagenbeziehungen mit Vorteil verwendet und wir wollen daher von den früheren Sätzen im Folgenden nur jene

in Tetraedercoordinaten wiederholen, die sich nicht auf Maßverhältnisse beziehen.

Als die Bedingung der vereinigten Lage von Punct und Ebene fanden wir:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0.$$

Es ist dies auch die allgemeinste Form für die Gleichung sowohl eines Punctes als auch einer Ebene, denn je nachdem wir darin die u oder x als variabel ansehen, stellt dieselbe einen Punct oder eine Ebene dar.

Hieraus ergeben sich nun durch genau dieselben Überlegungen und Rechnungsoperationen wie in den Capiteln II und III die Sätze und Formeln:

1) Die Gleichung der Ebene, welche durch die drei Puncte: $x_1', x_2', x_3', x_4'; x_1'', x_2'', x_3'', x_4''; x_1''', x_2''', x_3''', x_4'''$ geht, ist

Die Gleichung des Punctes, welcher in drei Ebenen: $u_1', u_2', u_3', u_4'; u_1'', u_2'', u_3'', u_4''; u_1''', u_2''', u_3''', u_4'''$ liegt, ist

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & u_4'' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' & u_4''' \end{vmatrix} = 0,$$

gleichzeitig drückt diese Relation die Bedingung aus daß die vier

Puncte: $x_1, x_2, x_3, x_4; x_1', x_2', x_3', x_4'; x_1'', x_2'', x_3'', x_4''; x_1''', x_2''', x_3''', x_4'''$ in einer Ebene liegen. Ebenen: $u_1, u_2, u_3, u_4; u_1', u_2', u_3', u_4'; u_1'', u_2'', u_3'', u_4''; u_1''', u_2''', u_3''', u_4'''$ durch einen Punct gehen.

Dieselbe Thatsache drückt auch die Identität aus

$$\lambda P + \lambda' P' + \lambda'' P'' + \lambda''' P''' \equiv 0 \quad | \quad \lambda E + \lambda' E' + \lambda'' E'' + \lambda''' E''' \equiv 0$$

wenn

$$P = 0, P' = 0, P'' = 0, P''' = 0 \quad | \quad E = 0, E' = 0, E'' = 0, E''' = 0$$

die Gleichungen der vier

Puncte

Ebenen

vorstellen, und die Größen $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ Constante bezeichnen.

Ist daher

$$\begin{array}{l} P \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 \\ P' \equiv u_1 x_1' + u_2 x_2' + u_3 x_3' + u_4 x_4' \\ P'' \equiv u_1 x_1'' + u_2 x_2'' + u_3 x_3'' + u_4 x_4'' \\ P''' \equiv u_1 x_1''' + u_2 x_2''' + u_3 x_3''' + u_4 x_4''' \end{array} \quad \begin{array}{l} E \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 \\ E' \equiv u_1' x_1 + u_2' x_2 + u_3' x_3 + u_4' x_4 \\ E'' \equiv u_1'' x_1 + u_2'' x_2 + u_3'' x_3 + u_4'' x_4 \\ E''' \equiv u_1''' x_1 + u_2''' x_2 + u_3''' x_3 + u_4''' x_4 \end{array}$$

so ergiebt sich

$$\begin{array}{l|l}
 \lambda x_1 + \lambda' x_1' + \lambda'' x_1'' + \lambda''' x_1''' = 0 & \lambda u_1 + \lambda' u_1' + \lambda'' u_1'' + \lambda''' u_1''' = 0 \\
 \lambda x_2 + \lambda' x_2' + \lambda'' x_2'' + \lambda''' x_2''' = 0 & \lambda u_2 + \lambda' u_2' + \lambda'' u_2'' + \lambda''' u_2''' = 0 \\
 \lambda x_3 + \lambda' x_3' + \lambda'' x_3'' + \lambda''' x_3''' = 0 & \lambda u_3 + \lambda' u_3' + \lambda'' u_3'' + \lambda''' u_3''' = 0 \\
 \lambda x_4 + \lambda' x_4' + \lambda'' x_4'' + \lambda''' x_4''' = 0 & \lambda u_4 + \lambda' u_4' + \lambda'' u_4'' + \lambda''' u_4''' = 0
 \end{array}$$

und es drücken diese Formeln den Zusammenhang aus zwischen den homogenen Coordinaten von vier

Puncten, die in einer Ebene liegen. | Ebenen, die durch einen Punct gehen.

2) Die Identität

$$\lambda P + \lambda' P' + \lambda'' P'' \equiv 0 \quad | \quad \lambda E + \lambda' E' + \lambda'' E'' \equiv 0$$

stellt die Bedingung dar, unter welcher die drei Puncte | Ebenen

$$P = 0, \quad P' = 0, \quad P'' = 0 \quad | \quad E = 0, \quad E' = 0, \quad E'' = 0$$

in einer Geraden

liegen.

| sich schneiden.

Substituieren wir wieder in die Identität für die Symbole ihre Ausdrücke, so findet sich:

$$\begin{array}{l|l}
 \lambda x_1 + \lambda' x_1' + \lambda'' x_1'' = 0 & \lambda u_1 + \lambda' u_1' + \lambda'' u_1'' = 0 \\
 \lambda x_2 + \lambda' x_2' + \lambda'' x_2'' = 0 & \lambda u_2 + \lambda' u_2' + \lambda'' u_2'' = 0 \\
 \lambda x_3 + \lambda' x_3' + \lambda'' x_3'' = 0 & \lambda u_3 + \lambda' u_3' + \lambda'' u_3'' = 0 \\
 \lambda x_4 + \lambda' x_4' + \lambda'' x_4'' = 0 & \lambda u_4 + \lambda' u_4' + \lambda'' u_4'' = 0
 \end{array}$$

und es drücken daher diese Relationen den Zusammenhang aus zwischen den homogenen Coordinaten dreier

Puncte, die in einer Geraden | Ebenen, die sich in einer Geraden liegen. | schneiden.

3) Es ist auch leicht die Bedingungen herzuleiten, unter welchen eine Gerade in einer Ebene liegt. | durch einen Punct geht.

Die Gerade, deren Strahlen-coordinaten $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$ seien, wird von der Tetraeder-ecke $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ durch die Ebene (§ 36):

$$p_{24} x_1 - p_{14} x_2 + p_{12} x_3 = 0;$$

von der Ecke $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ durch die Ebene

$$p_{23} x_1 - p_{13} x_2 + p_{12} x_3 = 0$$

projiciert; soll daher diese Gerade in der Ebene

Die Gerade, deren Axencoordinaten $q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{23}, q_{24}, q_{34}$ seien, schneidet die Tetraederfläche $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$ in dem Puncte (§ 36):

$$q_{24} u_1 - q_{14} u_2 + q_{12} u_3 = 0,$$

und die Tetraederfläche $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$ in dem Puncte

$$q_{23} u_1 - q_{13} u_2 + q_{12} u_3 = 0,$$

soll daher diese Gerade durch den Punct

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

liegen, so müssen sich zwei Constante λ_1 und λ_2 finden lassen, derart, daß

$$\begin{aligned} & \lambda_1 (p_{24} x_1 - p_{14} x_2 + p_{12} x_4) \\ & + \lambda_2 (p_{23} x_1 - p_{13} x_2 + p_{12} x_3) \\ & \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4, \end{aligned}$$

d. h. daß sie die vier Gleichungen befriedigen:

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda_1 p_{24} + \lambda_2 p_{23}; \\ u_2 &= -\lambda_1 p_{14} - \lambda_2 p_{13}; \\ u_3 &= \lambda_2 p_{12}; \quad u_4 = \lambda_1 p_{12}. \end{aligned}$$

Dies ist nur unter den Bedingungen möglich:

$$\begin{aligned} p_{12} u_1 &= p_{23} u_3 + p_{24} u_4 \\ p_{21} u_2 &= p_{13} u_3 + p_{14} u_4. \end{aligned}$$

Wählen wir statt der eben verwendeten Projectionsebenen die aus zwei anderen Ecken des Tetraeders, so erhalten wir zwei analoge Relationen, also von der Form:

$$\begin{aligned} p_{ik} u_i &= p_{k\lambda} u_\lambda + p_{k\mu} u_\mu \\ p_{ki} u_k &= p_{i\lambda} u_\lambda + p_{i\mu} u_\mu, \end{aligned}$$

wo die i, k, λ, μ verschiedene der Zahlen 1 bis 4 bedeuten.

Es geben also zwei Gleichungen von der obigen Form die Bedingungen der vereinigten Lage von Gerade und Ebene.

gehen, so müssen sich zwei Constante λ_1 und λ_2 finden lassen, derart, daß

$$\begin{aligned} & \lambda_1 (q_{24} u_1 - q_{14} u_2 + q_{12} u_4) \\ & + \lambda_2 (q_{23} u_1 - q_{13} u_2 + q_{12} u_3) \\ & \equiv x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4, \end{aligned}$$

d. h. daß sie die vier Gleichungen befriedigen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 q_{24} + \lambda_2 q_{23}; \\ x_2 &= -\lambda_1 q_{14} - \lambda_2 q_{13}; \\ x_3 &= \lambda_2 q_{12}; \quad x_4 = \lambda_1 q_{12}. \end{aligned}$$

Dies ist nur unter der Bedingung möglich:

$$\begin{aligned} q_{12} u_1 &= q_{23} u_3 + q_{24} u_4 \\ q_{21} u_2 &= q_{13} u_3 + q_{14} u_4. \end{aligned}$$

Wählen wir statt der eben verwendeten Durchschnittspuncte der Geraden mit den Tetraederflächen zwei andere, so erhalten wir zwei analoge Relationen, also von der Form:

$$\begin{aligned} q_{ik} u_i &= q_{k\lambda} u_\lambda + q_{k\mu} u_\mu \\ q_{ki} u_k &= q_{i\lambda} u_\lambda + q_{i\mu} u_\mu, \end{aligned}$$

|Punct.

§ 39.

Fortsetzung.

4) Das eben gewonnene Resultat liefert uns auch die Bedingung, unter welcher zwei Gerade in einer Ebene liegen.

Sind u_1, u_2, u_3, u_4 die Coordinaten der Ebene, welche durch die beiden sich schneidenden Geraden bestimmt wird, und sind $p_{12},$

durch einen Punct gehen.

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Coordinaten des Punctes, welcher durch die beiden sich schneidenden Geraden bestimmt wird und sind

$p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$ die Strahlen-
 coordinaten der einen, $p_{12}', p_{13}',$
 $p_{14}', p_{23}', p_{24}', p_{34}'$
 die der anderen Geraden, so bestehen nach dem Vorhergehenden
 zwischen den Coordinaten der Geraden und
 der Ebene | des Punctes:
 die Relationen:

$$\begin{array}{l|l} p_{21} u_2 - p_{13} u_3 - q_{14} u_4 = 0 & q_{21} x_2 - q_{13} x_3 - q_{14} x_4 = 0 \\ p_{12} u_1 - p_{23} u_3 - p_{24} u_4 = 0 & q_{12} x_1 - q_{23} x_3 - q_{24} x_4 = 0 \\ p_{31}' u_1 + p_{32}' u_2 - p_{43}' u_4 = 0 & q_{31}' x_1 + q_{32}' x_2 - q_{43}' x_4 = 0 \\ p_{41}' u_1 + p_{42}' u_2 - p_{34}' u_3 = 0 & q_{41}' x_1 + q_{42}' x_2 - q_{34}' x_4 = 0. \end{array}$$

Diese vier homogenen Gleichungen können aber nur bestehen, wenn ihre Determinante verschwindet, d. h.

$$\begin{vmatrix} 0, & p_{12}, & p_{13}, & p_{14} \\ -p_{12}, & 0, & p_{23}, & p_{24} \\ -p_{13}', & -p_{23}', & 0, & p_{34}' \\ -p_{14}', & -p_{24}', & -p_{34}', & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad \begin{vmatrix} 0, & q_{12}, & q_{13}, & q_{14} \\ -q_{12}, & 0, & q_{23}, & q_{24} \\ -q_{13}', & -q_{23}', & 0, & q_{34}' \\ -q_{14}', & -q_{24}', & -q_{34}', & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Es stellt also jede dieser Relationen die Bedingung dar, unter welcher sich zwei durch ihre Strahlen- oder Axen-coordinaten gegebene Geraden schneiden.

Durch Entwicklung der Determinante erhalten wir als die Bedingung, dafs die beiden Geraden sich schneiden, in der Form für

Strahlencoordinaten

$$p_{12} p_{34}' + p_{23} p_{14}' + p_{31} p_{24}' + p_{14} p_{23}' + p_{24} p_{31}' + p_{34} p_{12}' = 0.$$

Axencoordinaten

$$q_{12} q_{34}' + q_{23} q_{14}' + q_{31} q_{24}' + q_{14} q_{23}' + q_{24} q_{31}' + q_{34} q_{12}' = 0.$$

Zu denselben Relationen gelangen wir auch unmittelbar in folgender Weise.

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3, y_4 zwei Puncte; welche in der einen, x_1', x_2', x_3', x_4' und y_1', y_2', y_3', y_4' zwei Puncte, welche in der anderen Geraden liegen, so mufs, da diese vier Puncte in einer Ebene liegen,

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ x_1', & x_2', & x_3', & x_4' \\ y_1', & y_2', & y_3', & y_4' \end{vmatrix} = 0.$$

Sind u_1, u_2, u_3, u_4 und v_1, v_2, v_3, v_4 zwei Ebenen, welche durch die eine, u_1', u_2', u_3', u_4' und v_1', v_2', v_3', v_4' zwei Ebenen, welche durch die zweite Gerade gehen, so mufs, da sich die vier Ebenen in einem Puncte schneiden

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ u_1', & u_2', & u_3', & u_4' \\ v_1', & v_2', & v_3', & v_4' \end{vmatrix} = 0.$$

Lösen wir nun diese Determinante nach dem La Place'schen Satze in ein Aggregat aus Producten zweigliederiger Determinanten, auf deren Elemente den beiden ersten oder letzten Zeilen der viergliederigen Determinante entnommen sind, und setzen

$$\begin{aligned} p_{ik} &= x_i y_k - x_k y_i & q_{ik} &= u_i v_k - u_k v_i \\ p'_{ik} &= x'_i y'_k - x'_k y'_i, & q'_{ik} &= u'_i v'_k - u'_k v'_i, \end{aligned}$$

so erhalten wir die obigen Relationen.

Fallen die beiden Geraden zusammen, so gehen diese Bedingungsgleichungen in die Identitäten über, welche zwischen den sechs Strahlen- und Axencoordinaten einer Geraden bestehen.

5) Die eben abgeleiteten Formeln lassen sofort erkennen, daß je sechs Größen P_{ik} oder Q_{ik} , die sich vermöge zweier Constanten λ und λ' in der Form darstellen lassen:

$$\varrho P_{ik} = \lambda p_{ik} + \lambda' p'_{ik}, \quad \sigma Q_{ik} = \lambda q_{ik} + \lambda' q'_{ik},$$

wo ϱ und σ Proportionalitätsfactoren bedeuten, als die Strahlen- resp. Axencoordinaten einer Geraden aufgefaßt werden dürfen, die mit den beiden anderen durch denselben Punct geht und in derselben Ebene liegt. Und umgekehrt.

Wir wollen hier nur den Beweis für Strahlencoordinaten liefern, da sich demselben jener für Axencoordinaten leicht nachbilden läßt.

Zunächst finden wir

$$\begin{aligned} &\varrho^2 (P_{12} P_{34} + P_{31} P_{24} + P_{14} P_{23}) \\ &\equiv \lambda^2 (p_{12} p_{34} + p_{31} p_{24} + p_{14} p_{23}) \\ &+ \lambda \lambda' (p_{21} p_{34}' + p_{23} p_{14}' + p_{31} p_{24}' + p_{14} p_{23}' + p_{21} p_{31}' + p_{34} p_{12}') \\ &+ \lambda'^2 (p_{12}' p_{34}' + p_{31}' p_{24}' + p_{14}' p_{23}'). \end{aligned}$$

Da nun die Coefficienten nach § 35 und (4) verschwinden, so ist

$$P_{12} P_{34} + P_{31} P_{24} + P_{14} P_{23} \equiv 0,$$

und somit können diese sechs Größen als die Coordinaten einer Geraden betrachtet werden. Dieselbe schneidet jede der beiden Geraden, da sowohl

$$P_{12} p_{34} + P_{23} p_{14} + P_{31} p_{24} + P_{14} p_{23} + P_{24} p_{31} + P_{34} p_{12} \equiv 0,$$

als auch

$$P_{12} p_{34}' + P_{23} p_{14}' + P_{31} p_{24}' + P_{14} p_{23}' + P_{24} p_{31}' + P_{34} p_{12}' \equiv 0,$$

indem in jedem dieser Ausdrücke sowohl der Coefficient von λ als auch von λ' § 35 und (4) identisch verschwindet. Somit geht diese Gerade durch den Schnittpunct der beiden anderen. Sie liegt aber überdies auch in der Ebene derselben.

Denn sind u_1, u_2, u_3, u_4 die Coordinaten dieser Ebene, so ist

$$\varrho P_{ik} u_i \equiv \varrho (\lambda p_{ik} + \lambda' p'_{ik}) u_i$$

Da nun § 38, 3

$$p_{ik} u_i = p_{k\mu} u_\mu + p_{kv} u_v, \quad p'_{ik} u_i = p'_{k\mu} u_\mu + p'_{kv} u_v,$$

so ist

$$\begin{aligned} \varrho P_{ik} u_i &\equiv \varrho \lambda (p_{k\mu} u_\mu + p_{kv} u_v) + \varrho \lambda' (p'_{k\mu} u_\mu + p'_{kv} u_v) \\ &\equiv \varrho P_{k\mu} u_\mu + \varrho P_{kv} u_v, \end{aligned}$$

oder

$$P_{ik} u_i = P_{k\mu} u_\mu + P_{kv} u_v, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Die Umkehrung ergibt sich daraus, daß λ und λ' stets solche Werte beigelegt werden können, daß die Gerade durch jeden angenommenen weiteren Punct der Ebene geht.

S i e b e n t e s C a p i t e l .

Die einförmigen Grundgebilde.

§ 40.

Die räumlichen Grundgebilde.

1) Sind $P_1 = 0, \quad P_2 = 0$ die Gleichungen zweier Punkte, so stellt die Gleichung $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0,$ in der λ_1 und λ_2 Constante sind, einen Punct dar, welcher auf der Verbindungslinie der beiden Punkte P_1 und P_2 liegt. Lassen wir nun λ_1 und λ_2 oder, was dasselbe ist, ihr Verhältniß alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhalten wir die Gesammtheit aller Punkte, welche auf der Verbindungslinie von P_1 und P_2 liegen. In dieser Auffassung erscheint also die Gerade als der Träger aller ihrer Punkte. Der Inbegriff derselben wird eine Punctreihe genannt und die Gerade ihr Träger. Die einzelnen Punkte heißen die Elemente der Punctreihe. Jedem Werte des Verhältnisses von λ_1 und λ_2 entspricht somit ein Element und jedem Elemente ein bestimmter Wert dieses Verhältnisses.	Sind $E_1 = 0, \quad E_2 = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen, so stellt die Gleichung $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = 0,$ in der λ_1 und λ_2 Constante sind, eine Ebene dar, welche durch die Schnittlinie der beiden Ebenen E_1 und E_2 hindurchgeht. Lassen wir nun λ_1 und λ_2 oder, was das Gleiche ist, ihr Verhältniß alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhalten wir die Gesammtheit aller Ebenen, welche durch die Schnittlinie von E_1 und E_2 gehen. In dieser Auffassung erscheint also die Gerade als der Träger aller durch sie gehenden Ebenen. Der Inbegriff der letzteren wird ein Ebenenbüschel und die Gerade die Axe desselben genannt. Die einzelnen Ebenen heißen die Elemente des Ebenenbüschels. Jedem Werte des Verhältnisses von λ_1 und λ_2 entspricht somit ein Element und jedem Elemente ein bestimmter Wert dieses Verhältnisses.
--	--

Vermittelst dieser beiden Gebilde — der Punctreihe und des Ebenenbüschels — können wir in doppelter — reciproker — Weise noch ein drittes erzeugen. Projicieren wir nämlich alle Punkte einer Punctreihe aus einem Punkte des Raumes, so erhalten wir die Gesammtheit aller Strahlen, welche durch diesen Punct in der Ebene gezogen werden können, die durch denselben und den Träger der Punctreihe bestimmt ist.

Schneiden wir die Ebenen eines Ebenenbüschels durch eine Ebene, so erhalten wir die Gesamtheit aller Strahlen, welche in dieser Ebene durch den Punct gezogen werden können, in welchem dieselbe die Axe des Ebenenbüschels schneidet.

Die Gesamtheit aller durch einen Punct gehenden und in derselben Ebene liegenden Strahlen soll ein Strahlenbüschel heißen. Der gemeinschaftliche Schnittpunct der Strahlen heißt der Mittelpunkt oder das Centrum des Büschels, die nach beiden Seiten unbegrenzten Strahlen seine Elemente. Als Träger des Strahlenbüschels kann man, wie die vorhergehenden Erzeugungsweisen klar zeigen, nach Belieben entweder den Mittelpunkt oder die Ebene betrachten, in welcher die Strahlen liegen.

Gemäfs seiner doppelten Erzeugungsweise kann der Strahlenbüschel analytisch in zweifacher Weise durch ein System zweier Gleichungen dargestellt werden. Entweder durch das System einer Punctgleichung und einer Punctreihe, also:

$$P = 0; \quad \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0,$$

oder durch das der Gleichung einer Ebene und eines Ebenenbüschels; also:

$$E = 0, \quad \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = 0.$$

Die definierten drei Gebilde: die Punctreihe, der Strahlenbüschel und der Ebenenbüschel heißen die einförmigen Grundgebilde oder die Grundgebilde der ersten Stufe.

Jedes derselben enthält einfach unendliche viele Elemente, da diese erhalten werden, indem ein Parameter alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

2) Sind

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0$$

die Gleichungen dreier Puncte, so stellt die Gleichung

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0,$$

in der λ_1 , λ_2 und λ_3 Constante sind, einen Punct dar, welcher in der Ebene der drei Puncte P_1 , P_2 , P_3 liegt. Lassen wir hierin λ_1 , λ_2 , λ_3 oder, was das Gleiche ist, die Verhältnisse zweier dieser Gröfsen zur dritten alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhalten

Sind

$$E_1 = 0, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = 0$$

die Gleichungen dreier Ebenen, so stellt die Gleichung

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = 0,$$

in der λ_1 , λ_2 und λ_3 beliebige Constante sind, eine Ebene dar, welche durch den Schnittpunct der drei Ebenen E_1 , E_2 , E_3 geht. Lassen wir hierin die Parameter λ_1 , λ_2 , λ_3 oder, was das nämliche ist, die Verhältnisse zweier derselben zum dritten alle Werte von $-\infty$ bis

wir die Gesammtheit aller Punkte, welche die Ebene der drei Punkte P_1, P_2, P_3 erfüllen. Diese Ebene erscheint hiernach als der Träger aller ihrer Punkte; wir nennen die Gesammtheit derselben ein ebenes System. Im ebenen System sind somit unendlich viele Punktreihen und Strahlenbüschel als Elemente enthalten, denn alle in einer Geraden liegenden Punkte des Systems bilden eine Punktreihe, und alle durch einen Punkt gehenden Strahlen des Systems einen Strahlenbüschel.

Jedes ebene System wird aus einem Punkte durch einen Strahlenbündel projiciert.

Diese beiden Gebilde: das ebene System und der Strahlenbündel, heißen die Grundgebilde der zweiten Stufe.

Wir sind berechtigt, dieselben als Grundgebilde höherer Stufe aufzufassen, da jedes derselben doppelt unendlich viele Elemente enthält, indem dieselben dadurch erhalten werden, daß zwei Parameter — die Verhältnisse zweier der Größen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zur dritten — alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Dies geht auch aus der Gleichung hervor

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

welche sowohl als die Gleichung eines ebenen Systems als auch eines Strahlenbündels angesehen werden kann.

3) Schließlich haben wir noch ein Grundgebilde der dritten Stufe, das räumliche System oder der unbegrenzte Raum selbst mit allen seinen Punkten, Geraden und Ebenen. Das räumliche System enthält also unendlich viele Grundgebilde der ersten und zweiten Stufe als Elemente; denn jede Ebene desselben ist der Träger eines ebenen Systems, jeder Punkt der Mittelpunkt eines Strahlenbündels, jede Gerade der Träger einer Punktreihe und die Axe eines Ebenenbüschels. Jedes dieser Grundgebilde besitzt eine eigene Geometrie, die wir im Folgenden entwickeln wollen.

$+\infty$ durchlaufen, so erhalten wir die Gesammtheit aller Ebenen, welche durch den Schnittpunkt der drei Ebenen E_1, E_2, E_3 hindurchgeht. Dieser Punkt erscheint hiernach als der Träger aller Ebenen, welche durch ihn gehen; wir nennen die Gesammtheit derselben einen Strahlenbündel, den Punkt selbst dessen Mittelpunkt. Im Strahlenbündel sind somit unendlich viele Ebenenbüschel und Strahlenbüschel als Elemente enthalten, denn alle Ebenen des Bündels, die sich in einer Axe schneiden, bilden einen Ebenenbüschel; und alle Strahlen desselben, welche in einer Ebene liegen, einen Strahlenbüschel.

Jeder Strahlenbündel wird von einer Ebene in einem ebenen Systeme geschnitten.

§ 41.

Geometrie der einförmigen Grundgebilde.

Wir wollen zunächst untersuchen, welche Bedeutung der Parameter hat, der in der Gleichung einer Punctreihe oder eines Ebenenbüschels auftritt. Stellt

$$U + \lambda V = 0$$

die Gleichung der Punctreihe oder des Ebenenbüschels dar, so kennen wir die Bedeutung des Parameters λ , sobald die Gleichungen $U = 0$, $V = 0$ der beiden Grundelemente in den gewöhnlichen Coordinaten gegeben sind: Es ist dann λ bis auf einen constanten Factor gleich dem Abstandsverhältnisse des betreffenden Elementes von den beiden Grundelementen. Dieselbe Bedeutung behält das λ , wenn die Grundelemente durch homogene Coordinaten dargestellt werden. Wir erkennen diese Thatsache, indem wir in der Gleichung der Punctreihe oder des Ebenenbüschels die homogenen Coordinaten auf die gewöhnlichen zurückführen (§ 32). Dies geschieht mittelst der Formel § 32 S. 114:

$$\rho \sigma (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4) = R (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4) \\ (D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4) (d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4) (ux + vy + wz + 1).$$

Sind daher $U' = 0$ und $V' = 0$ die Gleichungen bezüglich der Grundelemente $U = 0$ und $V = 0$ in gewöhnlichen Coordinaten, so erhält man als Gleichung des Gebildes $U + \lambda V = 0$ die Gleichung:

$$U' + m \lambda V' = 0,$$

wo das m ein constanter, blofs von den Constanten der Gleichungen der Grundelemente abhängiger Factor ist. Derselbe wird durch verschiedene Ausdrücke dargestellt, je nachdem $U + \lambda V = 0$ die Gleichung einer Punctreihe oder eines ~~Strahlen~~ Ebenenbüschels darstellt. Sind im *Ebenen*-ersteren Falle x_1, x_2, x_3, x_4 und x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 die homogenen Coordinaten der Grundpuncte $U = 0$ und $V = 0$, so ist

$$m = \frac{D_1 x'_1 + D_2 x'_2 + D_3 x'_3 + D_4 x'_4}{D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4};$$

bezeichnen im zweiten Falle u_1, u_2, u_3, u_4 die homogenen Coordinaten der Grundebene $U = 0$, und u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 die der anderen Grundebene $V = 0$, so ist

$$m = \frac{d_1 u'_1 + d_2 u'_2 + d_3 u'_3 + d_4 u'_4}{d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4}.$$

Also ist auch, wenn $U = 0$ und $V = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen oder Puncte in homogenen Coordinaten bezeichnen, der Parameter λ in der Gleichung

$$U + \lambda V = 0$$

abgesehen von einem constanten Factor, immer gleich dem Abstandsverhältnisse des betreffenden Elementes von den beiden Grundelementen.

Ist daher $U = 0$ die Gleichung eines Punctes A , $V = 0$ die eines Punctes B und $U + \lambda V = 0$ die Gleichung eines Punctes C , so ist § 18

$$\frac{AC}{CB} = \alpha \cdot \lambda,$$

wo α eine Constante bezeichnet, welche bloß von den Constanten der Gleichungen der Grundelemente abhängt. Ist aber $U = 0$ die Gleichung einer Ebene a , $V = 0$ die der Ebene b , und stellt $U + \lambda V = 0$ die Ebene c dar, so ist § 12, 6

$$\frac{\sin(a, c)}{\sin(c, b)} = \beta \cdot \lambda,$$

wo wieder β eine derartige Constante ist.

Die Thatsache, daß das Abstandsverhältnis eines Elementes von den beiden Grundelementen, bis auf einen constanten Factor, gleich dem Parameter des betreffenden Elementes ist, war nur ein specieller Fall des allgemeinen Satzes, daß das Abstandsverhältnis eines Elementes von zwei anderen bis auf einen constanten Factor durch die Parameter der drei Elemente ausdrückbar ist.

Diese Behauptung läßt sich leicht beweisen, indem die Grundelemente in zwei der gegebenen Elemente verlegt werden. Der Parameter des dritten Elementes für diese beiden als Grundelemente ist dann bis auf einen constanten Factor gleich dem Abstandsverhältnisse dieses dritten Elementes von den beiden anderen. Sind nun $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Parameter der drei Elemente und sind $W_1 = 0, W_2 = 0, W_3 = 0$ bezüglich ihre Gleichungen, so ist, wenn ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 gewisse constante Factoren bezeichnen,

$$\varrho_1 W_1 \equiv U + \lambda_1 V; \quad \varrho_2 W_2 \equiv U + \lambda_2 V; \quad \varrho_3 W_3 \equiv U + \lambda_3 V.$$

Wählen wir nun die Elemente $W_1 = 0$ und $W_2 = 0$ zu Grundelementen, so können wir sowohl U als V vermöge der beiden ersten dieser Gleichungen durch W_1 und W_2 ausdrücken. Diese Werte in dem Ausdrücke für W_3 eingeführt, geben

$$W_3 \equiv \frac{\lambda_3 - \lambda_2 \varrho_1}{\lambda_1 - \lambda_2 \varrho_3} W_1 - \frac{\lambda_3 - \lambda_1 \varrho_2}{\lambda_1 - \lambda_2 \varrho_3} W_2,$$

somit ist die Gleichung des dritten Elementes für $W_1 = 0$ und $W_2 = 0$ als Grundelemente:

$$\varrho_1 (\lambda_2 - \lambda_3) W_1 - \varrho_2 (\lambda_1 - \lambda_3) W_2 = 0.$$

Das Abstandsverhältnis des Elementes W_3 von W_1 und W_2 ist daher bis auf einen constanten Factor: $\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2}$.

§ 42.

Fortsetzung.

Auch der Parameter, welcher in dem Gleichungssysteme eines Strahlenbüschels erscheint, hat eine ähnliche Bedeutung bezüglich der Strahlen seines Büschels, wie jener in der Gleichung des Ebenenbüschels oder der Punctreihe auftretende für die Elemente seines Gebildes.

Ist der Strahlenbüschel durch das Gleichungssystem einer Ebene und eines Ebenenbüschels gegeben:

$$E = 0, \quad E_1 + \lambda E_2 = 0,$$

so können wir ihn leicht als das Erzeugnis der Ebene $E = 0$ mit jenem Ebenenbüschel darstellen, dessen Axe auf der Ebene des Strahlenbüschels senkrecht steht. Denn ist $U = 0$ die Ebene dieses Ebenenbüschels, welche durch den Strahl $\lambda = 0$, also durch die Schnittlinie der Ebenen $E = 0$ und $E_1 = 0$ hindurchgeht, so hat ihre Gleichung $U = 0$ die Form $E + m E_1 = 0$, und $V = 0$ die Gleichung jener Ebene, welche durch den Strahl $\lambda = \infty$ geht, die Form $E + n E_2 = 0$. Somit ist, wenn wir mit μ einen Parameter bezeichnen, die Gleichung dieses Ebenenbüschels: $U + \mu V = 0$, oder

$$(1 + \mu) E + m E_1 + n \mu E_2 = 0.$$

Sind nun $E_1 + \lambda E_2 = 0$ und $U + \mu V = 0$ die Gleichungen der Ebenen der beiden Ebenenbüschel, welche in $E = 0$ einen beliebigen, aber denselben Strahl des Büschels bestimmen, so muß sich aus dem Umstande, daß diese drei Ebenen sich in derselben Geraden schneiden, eine Beziehung zwischen λ und μ ableiten lassen. In der That existieren infolge dieses Umstandes drei Constante $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, welche die Identität ergeben:

$$\varrho_1 E + \varrho_2 (E_1 + \lambda E_2) + \varrho_3 (U + \mu V) \equiv 0,$$

oder

$$[\varrho_1 + (1 + \mu) \varrho_3] E + (\varrho_2 + m \varrho_3) E_1 + (\lambda \varrho_2 + n \mu \varrho_3) E_2 \equiv 0.$$

Hieraus folgen zur Bestimmung der Verhältnisse von $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ und des μ die Gleichungen

$$\varrho_1 + (1 + \mu) \varrho_3 = 0; \quad \varrho_2 + m \varrho_3 = 0; \quad \lambda \varrho_2 + n \mu \varrho_3 = 0,$$

woraus sich zwischen λ und μ die Abhängigkeit ergibt:

$$\mu = \frac{m}{n} \lambda.$$

Die beiden Ebenenbüschel $E_1 + \lambda E_2 = 0$ und $U + \frac{m}{n} \lambda V = 0$ erzeugen also in der Ebene $E = 0$ denselben Strahlenbüschel, und zwar bestimmen die Ebenen der beiden Ebenenbüschel, welche demselben

Parameterwerte entsprechen, demselben Strahl des Strahlenbüschels, und umgekehrt.

Nach der erkannten geometrischen Bedeutung des Parameters in der Gleichung des Ebenenbüschels, ist aber λ bis auf eine Constante gleich dem Abstandsverhältnisse irgend eines Punctes der Ebene

$$U + \frac{m}{n} \lambda V = 0 \text{ von den beiden Grundelementen } U = 0 \text{ und } V = 0.$$

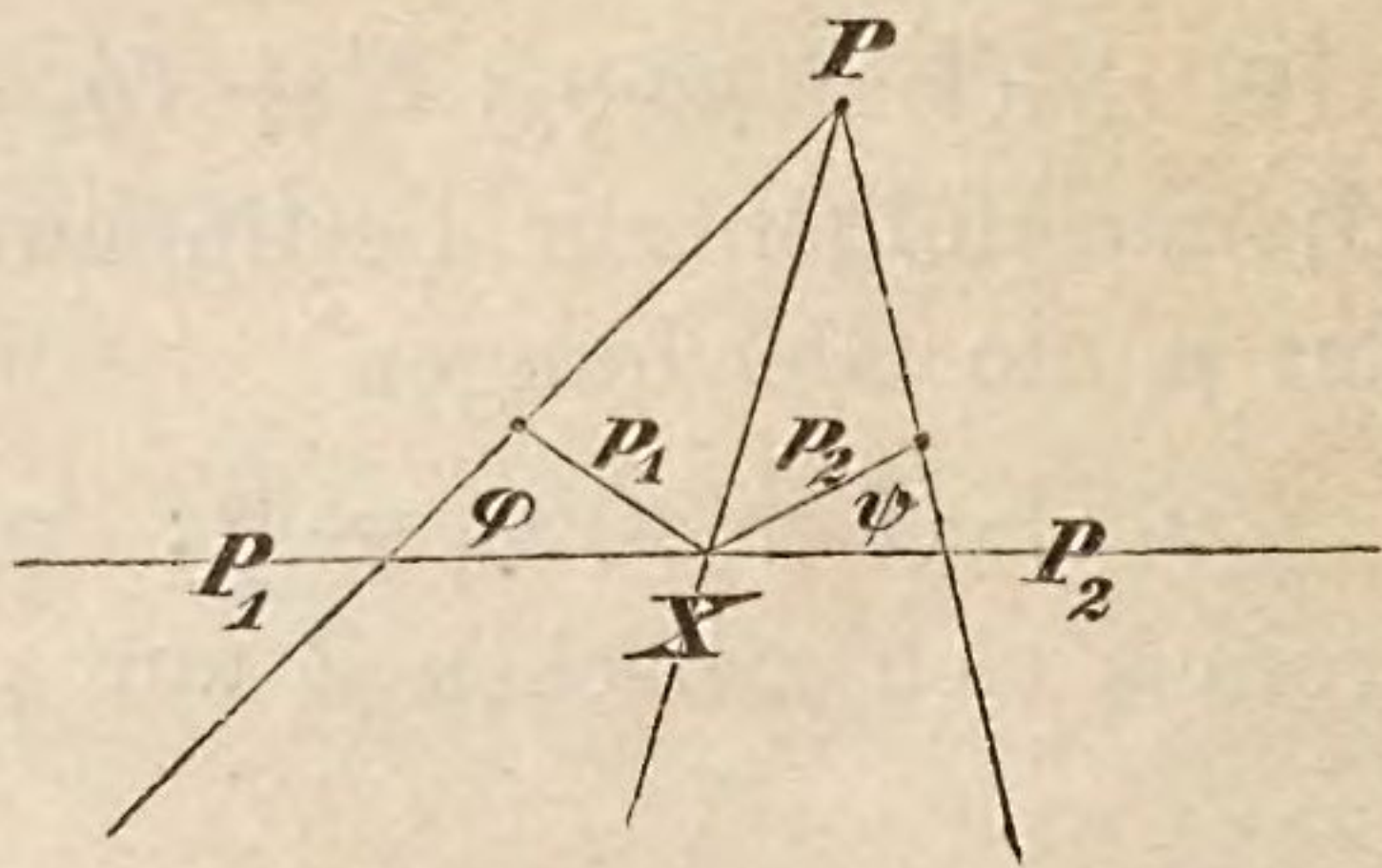
Da nun gemäß Construction der Ebenenbüschel $U + \frac{m}{n} \lambda V = 0$ auf der Ebene des Strahlenbüschels senkrecht steht, so ist die Gerade, welche von irgend einem Puncte dieser Ebene senkrecht auf einen Strahl des Büschel gefällt wird, auch senkrecht auf der Ebene des Ebenenbüschels $U + \frac{m}{n} \lambda V = 0$, welche durch diesen Strahl hindurchgeht.

Nennt man nun die Strahlen des Strahlenbüschels, welche von den Ebenen $U = 0$ und $V = 0$ bestimmt werden, die Grundelemente des Strahlenbüschels, und das Verhältniß der Abstände irgend eines Punctes eines Strahles des Büschels von den beiden Grundelementen — das für alle Puncte desselben Strahles constant ist — das Abstandsverhältniß dieses Strahles von den beiden Grundelementen, so ist also das Abstandsverhältniß irgend einer Ebene des Büschels

$$U + \frac{m}{n} \lambda V = 0$$

von seinen Grundelementen gleich dem Abstandsverhältnisse des Strahles im Strahlenbüschel, der durch diese Ebene bestimmt wird, von den beiden Grundelementen des Strahlenbüschels. Somit ist der Parameter λ in $E_1 + \lambda E_2 = 0$ bis auf einen constanten Factor gleich dem Abstandsverhältnisse des entsprechenden Strahles im Strahlenbüschel von seinen beiden Grundelementen.

Zu demselben Ergebnisse gelangen wir, wenn wir den Strahlenbüschel durch die Gleichung eines Punctes $P = 0$ in Verbindung mit der Gleichung einer Punctreihe $P_1 + \lambda P_2 = 0$ darstellen. Denn bezeichnen wir den Punct

$$P_1 + \lambda P_2 = 0$$


kurz mit X und fällen von X die Senkrechten p_1 und p_2 bezüglich auf PP_1 und PP_2 , so ist λ bis auf einen constanten Factor gleich $\frac{P_1X}{XP_2}$, also

$$\lambda = \varrho \frac{P_1 X}{X P_2},$$

oder

$$\lambda = \frac{\varrho \sin \psi}{\sin \varphi} \frac{p_1}{p_2},$$

wo φ und ψ die Winkel sind, welche die Grundstrahlen des Strahlenbüschels mit dem Träger der Punctreihe bilden, also $\frac{\varrho \sin \psi}{\sin \varphi}$ eine Constante ist.

Nennen wir daher den Parameterwert, vermittelt welchen ein Strahl eines Strahlenbüschels bestimmt wird, den Parameter dieses Strahles, so können wir die vorhergehenden Untersuchungen in den Satz zusammenfassen:

Der Parameter des Strahles eines Strahlenbüschels ist bis auf einen constanten Factor gleich dem Abstandsverhältnisse dieses Strahles von den beiden Grundstrahlen des Büschels.

§ 43.

Die Elemente irgend zweier einförmigen Grundgebilde können in mannichfache Abhängigkeit von einander gebracht werden, indem die Parameter, welche in ihren Gleichungen auftreten, in irgend einer Weise mit einander verknüpft werden. Wir wollen hier zunächst die einfachste Abhängigkeit, bei welcher die Elemente der beiden Gebilde einander eindeutig entsprechen, d. h. jedem Elemente des einen Gebildes ein und nur ein Element des anderen entspricht, erörtern. Diese eindeutige Zuordnung der Elemente tritt offenbar dann und nur dann ein, wenn die beiden Parameter der Gebilde durch eine nach jedem von ihnen lineare Relation mit einander verknüpft sind. Denn nur dann erhalten wir zu jedem Werte des einen Parameters einen einzigen Wert des anderen, und weisen wir also die beiden diesen Parameterwerten zugehörigen Elemente als einander entsprechende zu, so besteht zu jedem Elemente des einen Gebildes ein einziges entsprechendes Element im anderen Gebilde.

Zwei Grundgebilde der ersten Stufe, deren Elemente einander eindeutig zugeordnet sind, werden zu einander projectivisch, auch projectivisch auf einander bezogen, oder projectivische auch projectivisch verwandte Gebilde genannt; die Gleichung zwischen ihren Parametern heißt ihre Verwandtschaftsgleichung.

Ein Ebenenbüschel oder Strahlenbüschel und die Punctreihe, die von ihm auf einer Geraden bestimmt wird, sind offenbar für die incidenten als entsprechende Elemente zu einander projectivisch, da

sich dieselben eindeutig bedingen. Ebenso ist der Strahlenbüschel, der in einer Ebene von einem Ebenenbüschel ausgeschnitten wird, in Ansehung der incidenten Elemente zum Ebenenbüschel projectivisch.

Sind zwei einförmige Grundgebilde A und B zu demselben dritten C projectivisch, so sind auch die Elemente der beiden Gebilde A und B auf einander eindeutig bezogen, indem die beiden von A und B , welche demselben Elemente in C entsprechen, einander zugeordnet sind. Daraus folgt somit:

Sind zwei einförmige Grundgebilde zu demselben dritten projectivisch, so sind sie auch unter einander projectivisch.

Und somit:

Ist in einer Reihe einförmiger Grundgebilde jedes Gebilde zu seinem nachfolgenden projectivisch, so sind alle unter einander projectivisch.

Daher sind zwei Punctreihen, welche in demselben Strahlen- oder Ebenenbüschel liegen, zu einander projectivisch in Ansehung der Elemente, welche demselben Elemente des Strahlen- oder Ebenenbüschels entsprechen. Ebenso sind zu einander projectivisch:

Eine Punctreihe und ein Strahlenbüschel, zwei Strahlenbüschel oder zwei Punctreihen, die durch denselben Ebenenbüschel ausgeschnitten werden; zwei Ebenenbüschel, welche dieselbe Punctreihe oder denselben Strahlenbüschel bestimmen, und zwar immer in Ansehung jener Elemente, welche demselben Elemente des dritten Grundgebildes entsprechen.

§ 44.

Fortsetzung.

Sind also $M = 0$, $N = 0$ die Gleichungen der Grundelemente eines Ebenenbüschels oder einer Punctreihe und $P' = 0$, $Q' = 0$ jene der Grundelemente eines anderen derartigen Gebildes, so werden die beiden Gebilde bezüglich durch die Gleichungen dargestellt:

$$M + \lambda N = 0, \quad P' + \lambda' Q' = 0,$$

die durch Hinzutritt der Gleichung einer Ebene oder eines Punctes auch Strahlenbüschel darstellen. Sollen nun diese Gebilde zu einander projectivisch sein, so muß zwischen ihren Parametern λ und λ' eine nach jedem von ihnen lineare Gleichung bestehen, deren allgemeinste Form somit ist:

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0,$$

wo die a , b , c , d bestimmte gegebene Constante sind.

Aus dieser Verwandtschaftsgleichung läßt sich leicht eine wesentliche Eigenschaft zweier projectivischer Grundgebilde ableiten, die zu einer neuen mehr geometrischen Definition ihrer Verwandtschaft führt.

Zu diesem Behufe wählen wir zwei Paare einander entsprechender Elemente; λ und λ' seien die Parameter des einen und μ und μ' die des anderen Paares. Dann hängen also λ und λ' , μ und μ' durch die Gleichungen zusammen

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0; \quad a\mu\mu' + b\mu + c\mu' + d = 0.$$

Subtrahieren wir diese beiden Gleichungen von einander, so ergibt sich

$$a(\lambda\lambda' - \mu\mu') + b(\lambda - \mu) + c(\lambda' - \mu') = 0,$$

oder

$$a[\lambda'(\lambda - \mu) + \mu(\lambda' - \mu')] + b(\lambda - \mu) + c(\lambda' - \mu') = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{\lambda - \mu}{\lambda' - \mu'} = -\frac{a\mu + c}{a\lambda' + b} = -\frac{a\lambda + c}{a\mu' + b}. \quad (1.)$$

Die in dieser Formel auftretenden Größen haben noch eine von den Grundpunkten abhängige Bedeutung, doch läßt sich aus ihr eine von ihnen unabhängige Relation zwischen den einander eindeutig zugeordneten Elementen der beiden projectivischen Gebilde ableiten.

Es seien λ_1 und λ_1' ; λ_2 und λ_2' ; λ_3 und λ_3' die Parameter dreier Paare entsprechender Elemente der beiden projectivischen Gebilde. Wenden wir nun die obige Formel (1.) auf das erste und dritte Paar an, so liefert sie

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1' - \lambda_3'} = -\frac{a\lambda_3 + c}{a\lambda_1' + b},$$

auf das zweite und dritte angewendet ergibt sie

$$\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3' - \lambda_2'} = -\frac{a\lambda_3 + c}{a\lambda_2' + b},$$

woraus folgt:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1' - \lambda_3'}{\lambda_3' - \lambda_2'} = \frac{a\lambda_2' + b}{a\lambda_1' + b}.$$

In dieser Gleichung hat die rechte Seite eine von der Wahl der Grundpunkte abhängige geometrische Bedeutung, während auf der linken Seite sowohl Dividend als auch Divisor (§ 41) abgesehen von einem constanten von den Grundelementen abhängigen Factor Abstandsverhältnisse des Elementes 3 von den Elementen 1 und 2 sind. Da nun die rechte Seite dieser Gleichung bloß von den Parametern λ_1' und λ_2' abhängt, so ist für ein viertes Paar entsprechender Elemente, deren Parameter λ_4 und λ_4' seien:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_2} : \frac{\lambda_1' - \lambda_4'}{\lambda_4' - \lambda_2'} = \frac{a\lambda_2' + b}{a\lambda_1' + b}$$

und somit ist

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_2} = \frac{\lambda_1' - \lambda_3'}{\lambda_3' - \lambda_2'} : \frac{\lambda_1' - \lambda_4'}{\lambda_4' - \lambda_2'}. \quad (2.)$$

Hierin hat sowohl die rechte, als linke Seite des Verhältnisses eine von den Grundelementen unabhängige Bedeutung, indem jede derselben den Quotienten der Abstandsverhältnisse der Elemente (3) und (4) von den Elementen (1) und (2) für das betreffende Grundgebilde gleich ist.

Von den beiden Seiten dieser Proportion ist jede ganz in derselben Weise aus den Elementen*) des einen wie die andere aus den entsprechenden des anderen Gebildes gebaut. Die Form jeder der beiden Seiten dieser Proportion ist ein Verhältnis, dessen einzelne Glieder wieder Verhältnisse sind und das aus diesem Grunde ein Doppelverhältnis genannt wird.

Ein Doppelverhältnis der obigen Art, also ein Doppelverhältnis von der Form

$$\frac{a-b}{b-c} : \frac{a-d}{d-b}$$

wollen wir das Doppelverhältnis der vier Größen a, b, c, d , oder der vier den Parametern a, b, c, d zugehörigen Elemente nennen und mit dem Symbol (a, b, c, d) bezeichnen.

Dasselbe stellt also das Abstandsverhältnis der Elemente, die durch die Parameter c und d bestimmt werden, von denen mit den Parametern a und b dar. Bezeichnen wir die Elemente mit denselben Buchstaben wie ihre Parameter, so ist also § 41 und 42 im Falle a, b, c, d vier Punkte einer Geraden sind:

$$(a \ b \ c \ d) = \frac{\hat{a}c}{\hat{c}b} : \frac{\hat{a}d}{\hat{d}b}$$

und im Falle a, b, c, d vier Ebenen eines Ebenen-, oder vier Strahlen eines Strahlenbüschels sind:

$$(a \ b \ c \ d) = \frac{\sin a \wedge c}{\sin c \wedge b} : \frac{\sin a \wedge d}{\sin d \wedge b}.$$

Mittelst der obigen Definition können wir die obige Formel (2.) durch den Satz ausdrücken:

Sind zwei einförmige Grundgebilde zu einander projectivisch, so ist das Doppelverhältnis von irgend vier Elementen des einen Gebildes gleich dem aus den entsprechenden Elementen des anderen.

*) Der Kürze halber statt aus den Parametern der Elemente.

Es gilt aber offenbar auch die Umkehrung, welche die erwähnte neue Definition der Projectivität enthält:

Sind die Elemente zweier einförmigen Grundgebilde derart einander zugewiesen, daß das Doppelverhältnis gebildet aus irgend drei festen Elementen mit irgend einen vierten Elemente des einen Gebildes immer gleich ist dem Doppelverhältnisse gebildet aus den entsprechenden des anderen, so sind die beiden Gebilde projectivisch. Denn sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Parameter dreier Elemente des einen und $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ die der entsprechenden Elemente des anderen Gebildes, ist ferner λ der Parameter irgend eines Elementes des ersten Gebildes und λ' der seines entsprechenden im zweiten Gebilde, so hängen λ und λ' nach der Voraussetzung durch die Relation zusammen:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda - \lambda_2} : \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} = \frac{\lambda_1' - \lambda'}{\lambda' - \lambda_2'} : \frac{\lambda_1' - \lambda_3'}{\lambda_3' - \lambda_2'},$$

oder

$$\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda - \lambda_2} : \frac{\lambda_1' - \lambda'}{\lambda' - \lambda_2'} = m,$$

wo

$$m = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_1' - \lambda_3'}{\lambda_3' - \lambda_2'}$$

eine constante Gröfse ist. Somit sind λ und λ' durch eine nach jeder dieser Gröfsen lineare Relation mit einander verbunden, d. h. die beiden Gebilde sind projectivisch.

Unser oben definiertes Doppelverhältnis erlangt durch diesen Satz eine fundamentale Bedeutung für die projectivische Geometrie, welche eine eingehendere Erörterung seiner Beschaffenheit rechtfertigt.

§ 45.

Das Doppelverhältnis.

In dem vorhergehenden Paragraphen wurde mit dem Symbol $(abcd)$ das Doppelverhältnis

$$\frac{a - c}{c - b} : \frac{a - d}{d - b}$$

bezeichnet und dasselbe das Doppelverhältnis der vier Gröfsen a, b, c, d oder der ihnen als Parameter entsprechenden Elemente genannt. Die Umsetzung des Symbols in das Doppelverhältnis ist hiernach klar; sind a, b die ersten Buchstaben in dem Symbol, so wird das Doppelverhältnis erhalten, indem in

$$\frac{a - \quad}{\quad - b} : \frac{a - \quad}{\quad - b}$$

die leeren Stellen des ersten Bruches durch den dritten, des zweiten Bruches durch den vierten Buchstaben des Symbols ausgefüllt werden.

Durch Vertauschung der Aufeinanderfolge der Buchstaben im Symbol können wir also verschiedene Doppelverhältnisse erhalten und wir wollen nun den Zusammenhang aufsuchen, in dem sich die 24 hierdurch entstehenden Doppelverhältnisse befinden.

Von diesen 24 Doppelverhältnissen sind nicht alle von einander verschieden, sondern sie fallen zu vierten zusammen, wie der folgende Satz lehrt:

1) Der Wert des Symbols $(abcd)$ wird nicht geändert, wenn darin die beiden ersten und gleichzeitig die beiden letzten, oder wenn die beiden ersten mit den beiden letzten Buchstaben vertauscht werden.

Denn es ist

$$\begin{aligned}(badc) &= \frac{b-d}{d-a} : \frac{b-c}{c-a} = \frac{a-c}{c-b} : \frac{a-d}{d-b} \\ &= (abcd)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(cdab) &= \frac{c-a}{a-d} : \frac{c-b}{b-d} = \frac{a-c}{c-b} : \frac{a-d}{d-b} \\ &= (abcd),\end{aligned}$$

daher ist $(abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba)$.

Es hat also jedes Doppelverhältnis vier ihm gleichwertige.

Unter den 24 Doppelverhältnissen sind also nur sechs von einander verschiedene enthalten und deren Werte stehen wieder in einem leicht auffindbaren Zusammenhang, den die folgenden Sätze angeben.

2) Werden im Symbol die beiden ersten oder die beiden letzten Buchstaben mit einander vertauscht, so hat das neue Symbol den reciproken Wert des ursprünglichen.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}(abcd) &= \frac{a-c}{c-a} : \frac{a-d}{d-b} \\ (abdc) &= \frac{a-d}{d-b} : \frac{a-c}{c-b},\end{aligned}$$

daher

$$(abcd)(abdc) = 1$$

und da

$$(abdc) = (bacd)$$

auch

$$(abcd)(bacd) = 1.$$

3) Werden im Symbole die beiden mittleren Buchstaben miteinander vertauscht, so ergänzen sich die beiden Symbole zur Einheit.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
(acbd) &= \frac{a-b}{b-c} : \frac{a-d}{d-c} = \frac{(a-b)(d-c)}{(b-c)(a-d)} \\
&= - \frac{[(a-c) - (b-c)][(b-d) - (b-c)]}{(b-c)(a-d)} \\
&= - \frac{(a-c)(b-d) - (b-c)(b-d) - (b-c)(a-b)}{(b-c)(a-d)} \\
&= - \frac{(a-c)(b-d) - (a-d)(b-c)}{(b-c)(a-d)} \\
&= - \frac{(a-c)}{c-b} : \frac{a-d}{d-b} + 1 \\
&= - (abcd) + 1,
\end{aligned}$$

also

$$(abcd) + (acbd) = 1.$$

Vermittelst dieser Sätze ist es nun leicht, aus dem Werte eines Doppelverhältnisses den eines jeden anderen zu berechnen, dessen Symbol durch Vertauschung der Buchstaben im Symbole des gegebenen Doppelverhältnisses entsteht, wie dies die nachfolgende Zusammenstellung zeigt:

$$\begin{aligned}
(abcd) &= (badc) = (cdab) = (dcba) = k \\
(abdc) &= (bacd) = (dcab) = (cdba) = \frac{1}{k} \\
(acbd) &= (bdac) = (dbca) = (cadb) = 1 - k \\
(acdb) &= (dbac) = (cabd) = (bdca) = \frac{1}{1-k} \\
(adb c) &= (dacb) = (bcad) = (cbda) = \frac{k-1}{k} \\
(adcb) &= (cbad) = (bcd a) = (dabc) = \frac{k}{k-1}.
\end{aligned}$$

Die sechs verschiedenen Werte, deren das Doppelverhältnis aus vier Elementen fähig ist, sind sonach, wenn eines derselben den Wert k besitzt:

$$k, \frac{1}{k}, 1 - k, \frac{1}{1-k}; \frac{k-1}{k}; \frac{k}{k-1}.$$

Im allgemeinen sind alle diese sechs Werte von einander verschieden; in Folge besonderer Lage der vier Elemente zu einander können jedoch einige derselben zusammenfallen. In diesen Fällen muß dann, da zwei Relationen in k einander gleich werden, k selbst besondere Werte besitzen und diese wollen wir nunmehr aufsuchen.

Wird

$$\begin{array}{llll}
 1) & k = \frac{1}{k} & \text{so ist } k^2 = 1 & k = \pm 1 \\
 2) & k = 1 - k & „ „ \quad 2k = 1 & k = \frac{1}{2} \\
 3) & k = \frac{1}{1-k} & „ „ \quad k^2 - k + 1 = 0 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3) \\ 4) \end{array}} \right\} k = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\
 4) & k = \frac{k-1}{k} & „ „ \quad k^2 - k + 1 = 0 & \\
 5) & k = \frac{k}{k-1} & „ „ \quad k(k-2) = 0 & k = 2; \quad k = 0.
 \end{array}$$

Von diesen fünf Fällen bedingen sich jedoch nicht allein der Fall 3 und 4, sondern sie reducieren sich überhaupt auf nur drei von einander verschiedene. Denn gehen wir von $k = \pm 1$ aus, so erhalten wir aus der obigen Reihe, welche die Werte der sechs verschiedenen Doppelverhältnisse aus denselben vier Elementen angiebt:

$$1, \quad 1, \quad 0, \quad \infty, \quad 0, \quad \infty.$$

Dieselben sechs Werte, nur in anderer Reihenfolge, liefert aber auch der Wert $k = 0$ im fünften Falle.

Ist $k = -1$, so erhalten wir die sechs Werte der Doppelverhältnisse

$$-1, \quad -1, \quad 2, \quad \frac{1}{2}, \quad 2, \quad \frac{1}{2}.$$

Dieselbe Wertreihe, nur in anderer Folge, ergibt sich aber auch, wenn wir von $k = \frac{1}{2}$ im zweiten Falle oder $k = 2$ im fünften Falle ausgehen.

Die Forderung, daß von den sechs sonst verschiedenen Werten, deren die Doppelverhältnisse aus vier Elementen fähig sind, einige gleich werden, führt uns also zu drei ausgezeichneten Lagen der vier Elemente.

In der ersten hat eines ihrer Doppelverhältnisse den Wert $k = \pm 1$ und es haben daher zwei Elemente von den beiden anderen dasselbe Abstandsverhältnis, d. h. sie fallen zusammen.

In der zweiten Lage hat eines ihrer Doppelverhältnisse den Wert $k = -1$, d. h. die Abstandsverhältnisse zweier Elemente gegen die beiden anderen sind entgegengesetzt gleich. Diese Lage der Elemente wird die harmonische Lage, und die vier Elemente, deren Doppelverhältnis den Wert -1 hat, werden vier harmonische Elemente genannt. Bei dieser Gruppierung der Elemente im Symbol des Doppelverhältnisses, wo dasselbe den Wert -1 annimmt, heißen seine beiden ersten und seine beiden letzten Elemente einander zugeordnete oder auch harmonisch con-

jugierte Elemente. Das negative Zeichen von k zeigt somit an, daß, wenn ein Element des einen Paares innerhalb der Elemente des zweiten liegt, dann sein zugeordnetes Element außerhalb dieser beiden liegen muß: die zugeordneten Elemente der beiden Paare trennen daher gegenseitig einander. Vertauscht man im Symbol die zugeordneten Elemente eines Paares oder das eine Paar mit dem anderen, so behält das Symbol in jeder dieser Anordnungen seinen Wert -1 , d. h. in jeder dieser Anordnungen sind die vier Elemente vier harmonische Elemente.

Einen sehr speciellen Fall von vier harmonischen Punkten stellen die Grenzpunkte einer Strecke, ihr Mittelpunkt und der unendlich ferne Punkt der Geraden dar. Denn sind $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ die Gleichungen der Grenzpunkte, so ist $A_1 + A_2 = 0$ die Gleichung des Mittelpunktes der Strecke, und $A_1 - A_2 = 0$ die Gleichung des unendlich fernen Punktes, also der Wert des Doppelverhältnisses $(0, \infty, -1, +1) = \frac{-1}{1} = -1$.

Sind aber $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen, so sind $A_1 - A_2 = 0$, $A_1 + A_2 = 0$, die Gleichungen zweier Ebenen welche die beiden Nebenwinkel halbieren, die von den Ebenen $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$ gebildet werden.

Halbiert man einen Winkel, den zwei Ebenen einschließen, und seinen Nebenwinkel, so erhält man vier harmonische Ebenen, und zwar sind die Halbierungsebenen das eine und die beiden anderen Ebenen das andere Paar zugeordneter Elemente.

In der dritten Lage hat eines der Doppelverhältnisse der vier Punkte den Wert $k = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. Die vier Punkte selbst werden ein System äquianharmonischer Punkte genannt. Wir gehen jedoch auf die Eigenschaften dieses Systems nicht näher ein, da es innerhalb des Rahmens unserer Entwicklungen keine Anwendung findet.

§ 46.

Die Verwandtschaftsgleichung.

Die Verwandtschaftsgleichung, welche die projectivische Beziehung zwischen den Elementen zweier einförmigen Grundgebilde feststellt, enthält in homogener Weise vier Constante: a, b, c, d , und ist somit durch das Verhältnis dreier derselben zur vierten gegeben. Kennen wir daher drei Paare entsprechender Elemente der beiden Grundgebilde, so können wir diese drei Verhältnisse und damit die Verwandtschaftsgleichung bestimmen. Hieraus folgt:

Um zwei einförmige Grundgebilde projectivisch auf einander zu beziehen, kann man irgend drei Elementen des einen willkürlich drei beliebige Elemente des anderen Grundgebildes als entsprechende zuweisen, wodurch dann zu jedem vierten Elemente des einen ein entsprechendes Element des anderen Grundgebildes bestimmt ist.

Daher: Wenn zwei projectivische einförmige Grundgebilde drei Paare entsprechender Elemente gemein haben, so haben sie alle Elemente entsprechend gemein.

Die Grundelemente wurden bisher in den beiden projectivischen Gebilden als ganz willkürlich und unabhängig von einander vorausgesetzt. Lassen wir nun diese Voraussetzung fallen, so vereinfacht sich die Verwandtschaftsgleichung durch zweckmässige Wahl der Grundelemente und liefert einige wichtige Relationen.

Wir wollen zunächst annehmen, daß in den beiden projectivischen Gebilden

$$M + \lambda N = 0, \quad P' + \lambda' Q' = 0,$$

deren Verwandtschaftsgleichung

$$a \lambda \lambda' + b \lambda + c \lambda' + d = 0$$

sei, dem Elemente $M = 0$ das Element $P' \equiv M' = 0$ entspreche. Der M zugehörige Parameter ist nun $\lambda = 0$, der M' zugehörige $\lambda' = 0$; soll daher der Verwandtschaftsgleichung durch das Wertsystem $\lambda = \lambda' = 0$ genügt werden können, so muß

$$d = 0$$

sein, und die Verwandtschaftsgleichung die einfachere Form besitzen:

$$a \lambda \lambda' + b \lambda + c \lambda' = 0.$$

Entspricht nun überdies dem Elemente $N = 0$ des einen Gebildes im anderen das Element $Q' \equiv N' = 0$, so muß der Verwandtschaftsgleichung auch durch das Wertsystem $\lambda = \lambda' = \infty$ genügt werden. Dies ist aber nur möglich, wenn $a = 0$, also dieselbe die Form hat

$$b \lambda + c \lambda' = 0.$$

Sind also $M = 0$ und $M' = 0$, $N = 0$ und $N' = 0$ zwei Paare entsprechende Elemente zweier projectivischen Gebilde, und werden die beiden Elemente eines jeden Gebildes zu seinen Grundpuncten gewählt, und ist die Gleichung des einen Gebildes

$$M + \lambda N = 0,$$

so ist die des anderen

$$M' + c \lambda N' = 0,$$

wo c eine Constante bezeichnet.

§ 47.

Ausgezeichnete Elemente.

In den vorhergehenden Auseinandersetzungen haben wir keine Rücksicht auf die Art der Gebilde genommen, die wir projectivisch auf einander bezogen. Nunmehr wollen wir voraussetzen, daß die beiden projectivischen Gebilde gleichartig, entweder zwei Punctreihen, Ebenenbüschel oder Strahlenbüschel seien. In zwei derartigen projectivischen Gebilden existieren gewisse ausgezeichnete Elemente, die in einer einfachen Relation zu den entsprechenden Elementen der beiden Gebilde stehen.

1) Bei zwei projectivischen Punctreihen sind diese ausgezeichneten Elemente die beiden unendlich fernen Puncte der Punctreihe und die denselben entsprechenden Puncte, welche auch die Gegenpuncte genannt werden.

Nehmen wir an, $X = 0$ und $Y = 0$ seien die Grundpuncte der einen, die denselben bezüglich entsprechenden $X' = 0$ und $Y' = 0$ jene der anderen Punctreihe, so werden die beiden projectivischen Punctreihen durch die Gleichungen dargestellt (§ 46):

$$X + \lambda Y = 0, \quad X' + c\lambda Y' = 0,$$

wo c eine Constante bezeichnet. Ist daher $Z = 0$ irgend ein Punct der ersten, $Z' = 0$ der entsprechende der zweiten Punctreihe, so ist

$$\frac{XZ}{ZY} = \varrho \lambda; \quad \frac{X'Z'}{Z'Y'} = \varrho' c \lambda.$$

wo ϱ und ϱ' Constante bedeuten (§ 42). Für den unendlich fernen Punct Q der ersten Punctreihe ist $\lambda = -\frac{1}{\varrho}$, daher ergibt sich für seinen entsprechenden Q' in der anderen Punctreihe

$$\frac{X'Q'}{Q'Y'} = -\frac{c\varrho'}{\varrho}.$$

Für den unendlich fernen Punct R' der zweiten Punctreihe ist $\lambda = -\frac{1}{c\varrho'}$, somit für den entsprechenden R der ersten Punctreihe

$$\frac{XR}{RY} = -\frac{\varrho}{c\varrho'}.$$

Durch Multiplication beider Gleichungen ergibt sich

$$RX \cdot Q'X' = RY \cdot Q'Y'.$$

Da nun X und X' , Y und Y' irgend zwei Paare entsprechender Puncte der beiden Punctreihen waren, so ergibt diese Formel den Satz:

Das Rechteck, welches gebildet wird aus den Abständen zweier entsprechenden Puncte zweier projectivischen

Punctreihen von ihren zugehörigen Gegenpuncten, ist für alle entsprechenden Punctepaare constant. Dieses constante Rechteck nennt man auch die Potenz der projectivischen Beziehung.

Hieraus erhellt klar, daß die Gegenpuncte zweier projectivischen Punctreihen wirklich ausgezeichnete Puncte sind, da sich für sie der Ausdruck der projectivischen Beziehung, das Doppelverhältnis, auf ein einfaches Verhältniß reducirt. Ausgezeichnet sind auch die Puncte, deren Abstände von ihren Gegenpuncten der Seite eines Quadrates gleich sind, das mit der Potenz der projectivischen Beziehung inhaltsgleich ist. Um diese Puncte zu bestimmen, müssen wir die beiden Fälle unterscheiden, ob die Potenz der projectivischen Beziehung positiv oder negativ ist. Drücken wir dieselbe im ersten Falle durch k^2 und im zweiten durch $-k^2$ aus, so ist im ersten Falle

$$RX \cdot Q'X' = k^2,$$

im zweiten

$$RX \cdot Q'X' = -k^2.$$

Im ersten Falle sind also die entsprechenden Punctepaare H, H' und G, G' der obbezeichneten Art durch die Gleichungen bestimmt:

$$RH = Q'H' = k = RG = Q'G',$$

im zweiten Falle durch

$$RH = Q'G' = +k; \quad RG = Q'H' = -k.$$

§ 48.

Fortsetzung.

Solche ausgezeichnete Elemente existieren, wie sich leicht zeigen läßt, auch in zwei projectivischen Ebenenbüscheln. Um diesen Nachweis zu liefern, beziehen wir (§ 41) jeden der beiden Ebenenbüschel auf ein Ebenenpaar seines Büschels als Grundelemente, dessen Ebenen auf einander senkrecht stehen. Es seien $M = 0$ und $N = 0$ die Gleichungen der Grundebenen des einen, $P' = 0$ und $Q' = 0$ jene der Grundebenen des anderen Ebenenbüschels und

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0$$

ihre Verwandtschaftsgleichung. Ist dann $E = 0$ die Ebene, die im ersten Büschel dem Parameter λ zugehört und $E' = 0$ ihre entsprechende im zweiten Büschel, die also durch den Parameter λ' bestimmt wird, so ist

$$\lambda = m \frac{\sin(M \wedge E)}{\sin(E \wedge N)}; \quad \lambda' = m' \frac{\sin(P' \wedge E')}{\sin(E' \wedge Q')},$$

wo m und m' Constante sind. Da aber $MN = P'Q' = 90^\circ$ ist, so

kann λ bloß durch den Winkel ME und λ' durch $\sphericalangle PE'$ ausgedrückt werden, auf welche Weise sich ergibt:

$$\lambda = m \tan (M^{\wedge}E); \quad \lambda' = m' \tan (M'^{\wedge}E').$$

Es sei nun λ der Parameter irgend einer Ebene E des ersten Büschels, λ' der ihrer entsprechenden Ebene E' im zweiten Büschel; k der Parameter jener Ebene K des ersten Büschels, welche zu E senkrecht steht und k' jener der K entsprechenden Ebene K' im zweiten Büschel. Es bestehen dann die beiden Gleichungen

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0$$

$$ak k' + bk + ck' + d = 0.$$

Da aber E und K senkrecht auf einander sind, so ist

$$M^{\wedge}K = M^{\wedge}E + E^{\wedge}K = M^{\wedge}E \pm 90^{\circ}$$

und daher ist

$$k = m \tan M^{\wedge}K = m \tan (M^{\wedge}E \pm 90^{\circ}) = - \frac{m^2}{\lambda}.$$

Durch diese Relation treten an Stelle der obigen beiden Gleichungen:

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0$$

$$- am^2 k' - m^2 b + ck'\lambda + d\lambda = 0,$$

woraus durch Elimination von λ sich der Zusammenhang zwischen λ' und k' ergibt:

$$\frac{c\lambda' + d}{a\lambda' + b} = - \frac{am^2 k' + m^2 b}{ck' + d},$$

oder

$$(m^2 a^2 + c^2) \lambda' k' + (m^2 ab + cd) (\lambda' + k') + m^2 b^2 + d^2 = 0.$$

Diese Gleichung verbindet also die Parameter zweier Ebenen des zweiten Büschels, welche zwei auf einander senkrechten Ebenen des ersten entsprechen. Es läßt sich nun leicht erkennen, daß unter den Ebenenpaaren des zweiten Büschels, welche den auf einander senkrechten Ebenenpaaren des ersten entsprechen, sich eines befindet, dessen Ebenen selbst auf einander senkrecht stehen. Es ist jenes, bei welchem die Parameter λ' und k' seiner Ebenen außer der Gleichung

$$(m^2 a^2 + c^2) \lambda' k' + (m^2 ab + cd) (\lambda' + k') + m^2 b^2 + d^2 = 0$$

noch der Bedingung der Perpendicularität genügen

$$k'\lambda' = - m'^2.$$

Es bestehen somit zur Bestimmung von k' und λ' die beiden Gleichungen

$$k' + \lambda' = \frac{m'^2 (m^2 a^2 + c^2) - (m^2 b^2 + d^2)}{m^2 ab + cd}$$

$$k'\lambda' = - m'^2,$$

woraus sich k' und λ' als die Wurzeln der quadratischen Gleichung darstellen lassen:

$$\lambda'^2 - \frac{m'^2(m^2a^2 + c^2) - (m^2b^2 + d^2)}{m^2ab + cd} \lambda' - m'^2 = 0;$$

Da dieselbe stets zwei reelle Wurzeln besitzt, so erhalten wir den Satz:

In jedem von zwei projectivischen Ebenenbüscheln existiert im Allgemeinen ein, aber auch nur ein Ebenenpaar, dessen Ebenen ebenso wie seine entsprechenden im anderen Büschel auf einander senkrecht stehen.

Sind $S = 0$ und $T = 0$ die Gleichungen dieser Ebenen in dem einen, und $S' = 0$, $T' = 0$ die ihrer entsprechenden in dem anderen Ebenenbüschel, so sind

$$S + \lambda T = 0 \quad \text{und} \quad S' + \nu \lambda T' = 0,$$

wo ν eine Constante ist, die Gleichungen dieser beiden projectivischen Ebenenbüschel. Da nun der einer Ebene des Ebenenbüschels zugehörige Parameterwert bis auf eine Constante gleich dem Abstandsverhältnis dieser Ebene von den beiden Grundebenen ist, so ist, wenn die entsprechenden Ebenen $E = 0$ und $E' = 0$ der beiden Ebenenbüschel durch den Parameterwert λ in den obigen Gleichungen bestimmt werden,

$$\lambda = c \frac{\sin S \wedge E}{\sin E \wedge T} = -c \tan S \wedge E = -c \cot T \wedge E$$

$$\nu \lambda = -c' \tan S' \wedge E' = -c' \cot T' \wedge E',$$

wo c und c' constante Größen bedeuten. Hieraus folgt

$$\tan S \wedge E \tan T' \wedge E' = \frac{c'}{\nu c}$$

$$\tan T \wedge E \tan S' \wedge E' = \frac{\nu c}{c'}.$$

Es ist also jedes der beiden Producte

$$\tan S \wedge E \tan T' \wedge E', \quad \tan T \wedge E \tan S' \wedge E'$$

für jedes Paar entsprechender Ebenen E und E' der beiden Ebenenbüschel eine constante Gröfse.

Analog wie bei den Punctreihen existieren auch hier bei den Ebenenbüscheln zwei Paare entsprechender Ebenen, für welche sich diese Rechtecke in Quadrate verwandeln. Um diese Ebenenpaare aufzufinden, müssen wir wieder die beiden Fälle trennen, in welchen das obige Product positiv, gleich k^2 , oder negativ, gleich $-k^2$ ist. Im ersteren Falle sind diese beiden Ebenen des ersten Büschels G und H , und die entsprechenden G' und H' offenbar durch die Gleichungen gegeben

$$\tan S^{\wedge} G = \tan T'^{\wedge} G' = +k$$

$$\tan S^{\wedge} H = \tan T'^{\wedge} H' = -k,$$

im zweiten Falle durch die Gleichungen

$$\tan S^{\wedge} G = \tan T'^{\wedge} H' = +k$$

$$\tan T'^{\wedge} G' = \tan S^{\wedge} H = -k.$$

Die Ebenen G und H liegen also in jedem dieser Fälle symmetrisch zu den Ebenen S und T und die Ebenen G' und H' symmetrisch zu T' und S' .

2) Hieraus folgt unmittelbar, daß auch für zwei projectivische Strahlenbüschel dieselben Sätze bestehen. Denn die Winkel eines Strahlenbüschels sind die Neigungswinkel der Ebenen jenes Ebenenbüschels, dessen Axe im Mittelpunkte des Strahlenbüschels senkrecht auf seiner Ebene steht und zwei Ebenenbüschel, deren jeder einen von zwei projectivischen Strahlenbüscheln enthält, sind selbst zu einer projectivisch, § 43. Construieren wir daher zu jedem von zwei projectivischen Strahlenbüscheln den Ebenenbüschel, dessen Axe auf der Ebene des Strahlenbüschels senkrecht steht, so sind die beiden Ebenenbüschel zu einander projectivisch in Ansehung jener Elemente, die durch entsprechende Strahlen der beiden projectivischen Strahlenbüschel hindurchgehen. Die beiden projectivischen Ebenenbüschel enthalten nun zwei Paare entsprechender Ebenen S und S' , T und T' , von der Beschaffenheit, daß $S \perp T$ und $S' \perp T'$ ist; daher sind auch die Strahlen s und s' , t und t' der beiden Strahlenbüschel, welche bezüglich durch S , S' , T und T' bestimmt werden, entsprechende Strahlen, und es ist $s \perp t$, $s' \perp t'$. Also:

In jedem von zwei projectivischen Strahlenbüscheln existiert im Allgemeinen ein aber auch nur ein Strahlenpaar, dessen Strahlen, ebenso wie seine entsprechenden im anderen Büschel, auf einander senkrecht sind.

Bezeichnen nun X und X' , Y und Y' zwei Paare entsprechender Ebenen unserer beiden Ebenenbüschel, so ist

$$\tan S^{\wedge} X \cdot \tan T'^{\wedge} X' = \tan S^{\wedge} Y \cdot \tan T'^{\wedge} Y'$$

$$\tan T^{\wedge} X \cdot \tan S'^{\wedge} X' = \tan T^{\wedge} Y \cdot \tan S'^{\wedge} Y'.$$

Sind daher x , y , x' , y' die bezüglich durch die Ebenen X , Y , X' , Y' bestimmten Strahlen der beiden Strahlenbüschel, so ist daher wieder

$$\tan s^{\wedge} x \tan t'^{\wedge} x' = \tan s^{\wedge} y \tan t'^{\wedge} y'$$

$$\tan t^{\wedge} x \tan s'^{\wedge} x' = \tan t^{\wedge} y \tan s'^{\wedge} y'.$$

Für die Strahlen g , h und g' , h' , welche bezüglich durch die ausgezeichneten Ebenen der beiden Ebenenbüschel G , H und G' , H' bestimmt werden, verwandeln sich dann diese Rechtecke in Quadrate.

Diese Strahlen g und h in dem einen Büschel, die symmetrisch zu s und t und g' und h' , die in dem anderen Büschel symmetrisch zu s' und t' liegen, können daher als ausgezeichnete Strahlen angesehen werden.

§ 49.

Ü b u n g e n.

1) Sind zwei Punctreihen projectivisch, ist P ein Punct der ersten, Q' ein Punct der zweiten Punctreihe, so lassen sich stets Constante m, n, p, q auffinden, derart, daß für irgend ein Paar entsprechender Puncte X und X' der beiden Punctreihen

$$m PX \cdot Q'X' + n PX + p Q'X' + q = 0$$

ist.

Anl. Ist $P = 0$ die Gleichung des Punctes P , $Q' = 0$ jene des Punctes Q' , ist ferner $M = 0$ die Gleichung irgend eines Punctes M der ersten und $N' = 0$ die irgend eines Punctes N der zweiten Punctreihe und stellen

$$P + \lambda M = 0, \quad Q' + \lambda' N' = 0$$

die Gleichungen der beiden Punctreihen dar, so müssen die Parameter λ und λ' , da nach der Voraussetzung die beiden Punctreihen projectivisch, durch eine lineare Gleichung

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0$$

verknüpft sein. Ist daher X der Punct der durch λ , und X' sein entsprechender Punct der durch λ' bestimmt wird, so ergibt dieselbe

$$a\varrho\varrho' \frac{PX}{XM} \frac{Q'X'}{X'N'} + b\varrho \frac{PX}{XM} + c\varrho' \frac{Q'X'}{X'N'} + d = 0,$$

wo ϱ und ϱ' Constante sind. Drückt man hierin XM und $X'N'$ vermöge der Gleichungen aus

$$PX + XM + MP = 0, \quad Q'X' + X'N' + N'Q' = 0,$$

so erhellt die Richtigkeit der Behauptung.

2) Sind a und b' zwei Ebenen zweier projectivischer Ebenenbüschel, so lassen sich stets Constante μ, ν, π auffinden, dergestalt, daß für irgend ein Paar entsprechender Ebenen x und x'

$$\tan a^{\wedge}x \tan b'^{\wedge}x' + \mu \tan a^{\wedge}x + \nu \tan b'^{\wedge}x' + \pi = 0$$

ist.

3) Es sind vermöge der Gleichungen in den Aufgaben 1) und 2) die ausgezeichneten Elemente und die Potenz der projectivischen Beziehung zweier projectivischen einförmigen Grundgebilde abzuleiten.

4) Sind A, B, C, D vier Puncte einer Geraden, so ist

$$(ABCD) = \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC}\right) : \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{BD}\right).$$

Analog besteht für vier Ebenen a, b, c, d eines Ebenenbüschels die Identität $(abcd) = (\cot a^{\wedge}b - \cot c^{\wedge}b) : (\cot a^{\wedge}b - \cot d^{\wedge}b)$.

Anl. Man gelangt zur ersten Relation, indem man im Ausdrucke für $(ABCD)$: AC durch AB und BC , AD durch AB und BD ausdrückt, zur

zweiten, indem man in $(abcd) = \frac{\sin ac}{\sin cb} : \frac{\sin ad}{\sin db}$ dieselben Substitutionen, vorgenommen werden.

5) Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte, so bestehen die Identitäten

$$\begin{aligned}\frac{2}{BA} &= \frac{1}{BC} + \frac{1}{BD} \\ \frac{2}{AB} &= \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \\ \frac{2}{CD} &= \frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} \\ \frac{2}{DC} &= \frac{1}{DA} + \frac{1}{DB},\end{aligned}$$

und analog für vier harmonische Strahlen

$$\frac{2}{\tan a^b} = \frac{1}{\tan a^c} + \frac{1}{\tan a^d} \quad \text{u. s. w.}$$

6) Sind A und B, C und D zwei Paare conjugiert harmonischer Punkte und ist O die Mitte des Abstandes des einen Paares, etwa AB , so ist

$$\overline{OA}^2 = OC \cdot OD.$$

Anl. Aus $(ADCB) = \frac{1}{2}$ folgt zunächst

$$AC \cdot BD = AO \cdot CD = AD \cdot BC$$

und hieraus

$$AC \cdot BC = CD \cdot CO.$$

Die analogen Sätze für vier harmonische Strahlen aufzustellen.

7) Es sind die Sätze in 5) und 6) aus $(\lambda \mu \lambda_1 \mu_1) = -1$, wo λ und μ , λ_1 und μ_1 die Parameter zweier Paare conjugiert harmonischer Punkte bedeuten, zu beweisen.

8) Das Punctepaar oder Ebenenpaar zu bestimmen, das harmonisch ist zu jedem von zwei gegebenen Punctepaaren oder Ebenenpaaren.

Anl. Die Parameter dieses Ebenenpaares werden durch Auflösung einer quadratischen Gleichung erhalten. Die Construction ergibt sich aus 6.

9) Schneidet man die Kanten eines Tetraeders durch eine Ebene und construirt zu zwei Schnittpunkten derselben auf den Kanten des Tetraeders die vierten harmonischen Punkte, so liegen diese beiden construierten Punkte mit den Schnittpunkten auf den Gegenkanten in einer Ebene.

Anl. Sind $A = 0$ und $B = 0$ die Gleichungen zweier Punkte, so werden dieselben durch das Punctepaar $A + \lambda B = 0$, $A - \lambda B = 0$ harmonisch getrennt.

10) Schneidet man die Kanten eines Tetraeders durch eine Ebene und construirt auf jeder Kante zu dem Schnittpunkte den vierten harmonischen Punkt, so schneiden sich die Geraden, welche von

diesen Punkten die auf den Gegenkanten gelegenen verbinden, in einem Punkte.

Anl. Sind $\lambda_1 A_1 - \lambda_2 A_2 = 0$; $\lambda_2 A_2 - \lambda_3 A_3 = 0$; $\lambda_3 A_3 - \lambda_4 A_4 = 0$; $\lambda_4 A_4 - \lambda_1 A_1 = 0$ die Gleichungen der Schnittpunkte der gegebenen Ebene mit vier Tetraederkanten, so ergibt sich die Behauptung durch Interpretation der Gleichung

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0.$$

Anmerkung. Also schneiden sich die Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier Gegenkanten eines Tetraeders in einem Punkte.

11) Die Ebenen, welche durch je eine Kante des Tetraeders und den auf der gegenüberliegenden Kante construierten harmonischen Punkt gelegt werden, schneiden sich in einem Punkte.

Anl. Folgt ebenfalls aus der obigen Gleichung.

12) Welche Sätze ergeben sich durch Interpretation der Gleichungen:

$$- \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0$$

$$\lambda_1 A_1 - \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0$$

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0$$

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 - \lambda_4 A_4 = 0,$$

wo $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_4 = 0$ die Gleichungen der vier Eckpunkte eines Tetraeders sind?

Anl. Um die erste dieser Gleichungen zu behandeln, untersuche man zunächst die Bedeutung der Punkte

$$- \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0$$

$$- \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_4 A_4 = 0$$

$$- \lambda_1 A_1 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0$$

$$\lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0,$$

die sich aus der Bedeutung der Punkte ergibt

$$\lambda_1 A_4 - \lambda_2 A_2 = 0; \quad \lambda_2 A_2 - \lambda_3 A_3 = 0; \quad \lambda_3 A_3 - \lambda_4 A_4 = 0$$

$$\lambda_4 A_4 - \lambda_1 A_1 = 0$$

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0; \quad \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0; \quad \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0$$

$$\lambda_4 A_4 + \lambda_1 A_1 = 0.$$

13) Es sind die den Aufgaben 9–12 reciproken (§ 19) aufzustellen und durchzuführen.

Achtes Capitel.

Die Erzeugnisse zweier einförmigen projectivischen Grundgebilde.

§ 50.

Die Regelfläche.

Sind irgend zwei Grundgebilde der ersten Stufe projectivisch auf einander bezogen und sind sie derart, daß je zwei entsprechende Elemente derselben — indem man sie zum Schnitte bringt oder verbindet — einen Punct, eine Ebene oder Gerade bestimmen, so wird die Gesamtheit derselben, da sie continuierlich auf einander folgen, ein bestimmtes Gebilde erfüllen, welches das Erzeugnis der beiden projectivischen Grundgebilde genannt wird. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Erzeugnisse sollen nun im Folgenden aufgesucht werden.

Wir wollen hierbei der Kürze halber zu Grundelementen der beiden Gebilde, deren Erzeugnis wir zu untersuchen beabsichtigen, stets zwei Paare entsprechender Elemente derselben wählen. Bestimmen wir also die Elemente $U=0$, $V=0$ des einen Gebildes zu Grundelementen, so nehmen wir die entsprechenden im anderen Gebilde $U'=0$, $V'=0$ zu dessen Grundelementen. Die projectivische Beziehung der beiden Gebilde drückt sich dann durch die Form ihrer Gleichungen aus; stellt nämlich $U + \lambda V = 0$ die Gleichung des einen Gebildes dar, so ist $U' + m\lambda V' = 0$, wo m eine Constante ist, die Gleichung des anderen Gebildes.

Wir beginnen mit dem Erzeugnisse zweier projectivischen Ebenenbüschel, dem nach dem Gesetze der Reciprocität das Erzeugnis zweier projectivischen Punctreihen zur Seite steht. Beide sind, wie sich leicht zeigen läßt, identisch.

Diese Identität ist unmittelbar klar, da die Schnittlinien der entsprechenden Ebenen zweier projectivischer Ebenenbüschel gleichzeitig die Verbindungslinien der entsprechenden Puncte — die sogenannten Projectionsstrahlen — zweier projectivischer Punctreihen sind. Denn jeder der beiden projectivischen Ebenenbüschel schneidet die Axe des anderen in einer zu ihm projectivischen Punctreihe, somit sind diese beiden Punctreihen selbst zu einander projectivisch in Ansehung jener Elemente, welche durch entsprechende Ebenen der beiden Büschel bestimmt werden. Die Schnittlinie zweier entsprechender Ebenen der beiden Büschel kann daher auch als ein Projectionsstrahl dieser

beiden projectivischen Punctreihen angesehen werden. Und offenbar ist auch umgekehrt das Erzeugnis zweier projectivischen Punctreihen identisch mit dem Erzeugnisse der beiden projectivischen Ebenenbündel, deren jeder die eine Punctreihe aus der anderen Geraden als Axe projiciert.

Die Gesamtheit der Schnittlinien der entsprechenden Ebenen zweier projectivischen Ebenenbündel, oder der Projectionsstrahlen zweier projectivischer Punctreihen wird eine Regelschar genannt.

Die Coordinaten jedes Punctes einer Regelschar erfüllen, ebenso wie die Coordinaten einer Ebene, welche durch eine Gerade der Regelschar hindurchgeht, eine bestimmte Gleichung.

Sind etwa

$$E_1 + \lambda E_2 = 0 \text{ und } E_1' + m\lambda E_2' = 0$$

die Gleichung zweier projectivischen Ebenenbündel, so erfüllen die Coordinaten jedes Punctes der durch sie erzeugten Regelschar die Gleichung

$$m E_1 E_2' - E_1' E_2 = 0,$$

die also nach den Coordinaten des Punctes vom zweiten Grade ist.

Um die Gleichung zwischen den Coordinaten einer Ebene zu finden, welche durch eine Gerade der Regelschar geht, suchen wir zunächst die Gleichung der Punctreihe, die jeder Ebenenbündel auf der Axe des anderen induciert.

Ist nun

$$E_1 \equiv v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4, \quad E_1' \equiv v_1' x_1 + v_2' x_2 + v_3' x_3 + v_4' x_4$$

$$E_2 \equiv w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + w_4 x_4, \quad E_2' \equiv w_1' x_1 + w_2' x_2 + w_3' x_3 + w_4' x_4,$$

so ist die Gleichung des Durchschnittspunctes der Ebene

$$E_1' + m\lambda E_2' = 0$$

mit der Axe $(E_1 E_2)$ des anderen Ebenenbündels, wenn u_1, u_2, u_3, u_4 die laufenden Coordinaten dieser Punctgleichung bezeichnen,

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \\ v_1' + m\lambda w_1'; & v_2' + m\lambda w_2'; & v_3' + m\lambda w_3'; & v_4' + m\lambda w_4' \end{vmatrix} = 0,$$

also die Gleichung der darauf inducierten Punctreihe

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \\ v_2', & v_2', & v_3', & v_4' \end{vmatrix} + m\lambda \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \\ w_1', & w_2', & w_3', & w_4' \end{vmatrix} = 0.$$

variabel. λ .

Ebenso ist die Gleichung der durch den anderen Büschel auf der Axe ($E_1'E_2'$) bestimmten Punctreihe

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \\ w_1' & w_2' & w_3' & w_4' \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \\ w_1' & w_2' & w_3' & w_4' \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Jede der hier auftretenden Determinanten ist die linke Seite der Gleichungen des Durchschnittspunctes einer Grundebene eines der beiden Ebenenbüschel mit der Axe des anderen. Bezeichnen wir daher mit $P_1' = 0$ und $P_2' = 0$ die Gleichungen der Durchschnittspuncte der Ebenen E_1' und E_2' mit der Axe ($E_1 E_2$) und mit $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ jene der Durchschnittspuncte der Ebenen E_1 und E_2 mit der Axe ($E_1'E_2'$), so erhalten die vorstehenden Gleichungen die Form

$$P' \equiv P_1' + m \lambda P_2' = 0, \quad P \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0.$$

Die Punkte dieser beiden Punctreihen, welche demselben Parameterwerte λ entsprechen, liegen in den Ebenen der beiden Ebenenbüschel, welche durch eben diesen Wert λ des Parameters bestimmt werden; somit ist die Verbindungslinie der beiden Punkte auch die Schnittlinie dieser beiden Ebenen und es erfüllen also die Projectionsstrahlen dieser beiden projectivischen Punctreihen dieselbe Regelschar, wie die Schnittlinien der entsprechenden Ebenen der beiden gegebenen Ebenenbüschel.

Die Coordinaten jeder Ebene, welche durch einen Strahl der Regelschar geht, genügen also der Gleichung

$$P_1' P_2 - m P_1 P_2' = 0.$$

Dieselbe stellt die Gleichung der Regelschar in Ebenencoordinaten dar, da alle Ebenen, deren Coordinaten diese Gleichung befriedigen, die Regelschar bestimmen. Sie ist nach den Ebenencoordinaten vom zweiten Grade.

§ 51.

Fortsetzung.

Bei der Erforschung der Eigenschaften der Regelschar ist sowohl ihre Gleichung in Punct- als Ebenencoordinaten zu berücksichtigen. Doch bei Untersuchungen über bloße Lagebeziehungen, wie sie uns jetzt beschäftigen werden, überhebt uns das Gesetz der Reciprocität dieser doppelten Betrachtungen und es genügt also denselben eine der beiden Gleichungen zu Grunde zu legen. Wir wählen hierzu die Gleichung der Regelschar in Punctcoordinaten:

$$m E_1 E_2' - E_1' E_2 = 0. \quad (1.)$$

Aus derselben ergibt sich zunächst — was schon aus der Entstehungsweise klar ist — daß die Punkte der Axen der beiden Ebenenbüschel Punkte der Regelschar sind. Denn für die Coordinaten eines jeden solchen Punktes ist entweder $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$, oder $E_1' = 0$ und $E_2' = 0$, also genügen dieselben der Gleichung der Regelschar. Die obige Gleichung können wir auch in Form einer Proportion schreiben

$$E_1 : E_1' = E_2 : m E_2',$$

woraus sich ergibt

$$(E_1 + \lambda E_1') : (E_2 + m \lambda E_2') = E_1 : E_2$$

$$(E_1 + \mu E_1') : (E_2 + m \mu E_2') = E_1' : m E_2',$$

wobei λ und μ irgend welche Werte besitzen mögen. Aus diesen beiden Gleichungen ziehen wir

$$\frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1'}{m E_2'} = \frac{E_1 + \lambda E_1'}{E_2 + m \lambda E_2'} - \frac{E_1 + \mu E_1'}{E_2 + m \mu E_2'}$$

$$m E_1 E_2' - E_2 E_1' = \frac{m E_2 E_2'}{(E_2 + m \lambda E_2')(E_2 + m \mu E_2')} \times$$

$$[(E_1 + \lambda E_1')(E_2 + m \mu E_2') - (E_1 + \mu E_1')(E_2 + m \lambda E_2')].$$

Für die Coordinaten der Punkte der Regelschar verschwindet die linke Seite dieser Gleichung, es muß daher auch einer der Factoren rechts hierfür verschwinden. Da dies der erste Factor seiner Natur nach nicht sein kann, so erhalten wir für die Gleichung der Regelschar den neuen Ausdruck

$$(E_1 + \lambda E_1')(E_2 + m \mu E_2') - (E_1 + \mu E_1')(E_2 + m \lambda E_2') = 0.$$

Demselben wird genügt durch die Coordinaten jedes Punktes, die gleichzeitig zweien in derselben Colonne oder Zeile stehenden von den vier Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} E_1 + \lambda E_1' &= 0 & E_1 + \mu E_1' &= 0 \\ E_2 + m \lambda E_2' &= 0 & E_2 + m \mu E_2' &= 0. \end{aligned}$$

Die Erfüllung der in der nämlichen Zeile stehenden Gleichungen lehrt nichts Neues, sondern zeigt nur, daß die Axen der beiden Ebenenbüschel mit allen ihren Punkten in der Regelschar liegen; wohl ergibt sich aber aus der Thatsache, daß die Punkte, deren Coordinaten die beiden Gleichungen

$$E_1 + \lambda E_1' = 0, \quad E_2 + m \lambda E_2' = 0 \quad (2.)$$

befriedigen, in der Regelschar (1.) liegen, eine wichtige Folgerung. Diese beiden Gleichungen stellen nämlich, wenn wir darin λ als beweglich ansehen, zwei projectivische Ebenenbüschel dar und es liegen somit die Punkte der durch sie erzeugten Regelschar in der ersten Regelschar. Es besteht somit außer der ursprünglichen noch eine zweite Regelschar und jede Gerade der einen Regelschar schneidet die sämtlichen Geraden der anderen.

Dies läßt sich leicht auch direct zeigen, indem wir nachweisen, daß die zweite Regelschar durch projectivische Ebenenbüschel erzeugt werden kann, deren Axen irgend zwei Strahlen der ersten Regelschar sind. Es geht dies unmittelbar aus der Thatsache hervor, daß die beiden obigen Gleichungen (2.) mittelst zweier beliebigen Constanten ϱ und σ durch die folgenden ersetzt werden können

$$\begin{aligned}(E_1 + \varrho E_2) + \lambda (E_1' + m \varrho E_2') &= 0 \\ (E_1 + \sigma E_2) + \lambda (E_1' + m \sigma E_2') &= 0.\end{aligned}$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich ähnlich wie früher aus der Umformung der Gleichung

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_1'}{m E_2'}, \quad (1.)$$

denn hieraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{E_1 + \varrho E_2}{E_1' + m \varrho E_2'} &= \frac{E_2}{m E_2'} \\ \frac{E_1 + \sigma E_2}{E_1' + m \sigma E_2'} &= \frac{E_1}{E_1'}.\end{aligned}$$

Somit ist für alle Punkte der Regelschar (2.)

$$\frac{m E_1 E_2'}{E_1' E_2} = \frac{(E_1 + \sigma E_2)(E_1' + m \varrho E_2')}{(E_1 + \varrho E_2)(E_1' + m \sigma E_2')} = 1;$$

es genügen also die Coordinaten jedes ihrer Punkte der Gleichung

$$(E_1 + \sigma E_2)(E_1' + m \varrho E_2') - (E_1 + \varrho E_2)(E_1' + m \sigma E_2') = 0;$$

dieselbe kann man aber aus der Gleichung der beiden Ebenenbüschel

$$\left. \begin{aligned}(E_1 + \varrho E_2) + \lambda (E_1' + m \varrho E_2') &= 0 \\ (E_1 + \sigma E_2) + \lambda (E_1' + m \sigma E_2') &= 0\end{aligned} \right\} \quad (3.)$$

durch Elimination des Parameters λ erhalten.

Die durch diese beiden Ebenenbüschel erzeugte Regelschar ist identisch mit der Regelschar (2.), da jede der beiden Gleichungen (3.) eine Ebene darstellt, welche durch die Schnittlinie von

$$E_1 + \lambda E_1' = 0 \quad \text{und} \quad E_2 + m \lambda E_2' = 0$$

hindurchgeht, § 10. Die Geraden der Regelschar (2.) schneiden daher die Axen der beiden Ebenenbüschel (3.), also die Geraden, deren Gleichungen bezüglich

$$\begin{aligned}E_1 + \varrho E_2 &= 0, & E_1' + m \varrho E_2' &= 0 \\ E_1 + \sigma E_2 &= 0, & E_1' + m \sigma E_2' &= 0.\end{aligned}$$

Jedes dieser Gleichungssysteme stellt aber einen Strahl der ersten Regelschar dar, der wegen der Willkürlichkeit des ϱ und σ eine beliebige Gerade derselben ist, also schneiden die Geraden der zweiten Regelschar jeden Strahl der ersten.

§ 52.

Fortsetzung.

Zu demselben Ergebnisse können wir auch in anderer Weise gelangen. Da nämlich die Gleichung der Regelschar

$$m E_1 E_2' - E_1' E_2 = 0$$

nach den Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 homogen vom zweiten Grade ist, so ergibt sich hieraus unmittelbar:

Eine Ebene schneidet im Allgemeinen die Regelschar in einer allgemeinen Curve der zweiten Ordnung.

Hiervon überzeugen wir uns am einfachsten, indem wir diese Ebene zu einer Seitenebene des Fundamentaltetraeders annehmen. Wählen wir sie etwa zur Seitenebene $x_4 = 0$, so erhalten wir die Gleichung ihrer Schnittlinie mit der Regelschar, bezogen auf das in der Ebene gelegene Dreieck des Fundamentaltetraeders, § 37, wenn wir in der Gleichung der Regelschar $x_4 = 0$ setzen. Dieselbe ist aber nach x_1, x_2, x_3 homogen vom zweiten Grade.

Hieraus schon folgt:

Im Allgemeinen liegen auf einer Geraden nur zwei Punkte der Regelschar.

Denn da eine Gerade eine Curve der zweiten Ordnung in höchstens zwei Punkten schneidet, so hat die Gerade mit der Schnittfigur der Regelschar und einer Ebene, die durch die Gerade gelegt wird, höchstens zwei Punkte gemeinsam. Es ergibt sich dies auch daraus, daß die Resultante aus einer nach den Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 homogenen quadratischen Gleichung und zweien nach diesen Größen homogenen linearen Gleichungen, homogen vom zweiten Grade in zwei der Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 ist.

Hieraus können wir wieder zurückschließen, daß die Schnittfigur der Fläche mit einer Ebene eine Curve II. Ordnung ist.

Wird jedoch diese Resultante durch mehr als zwei Werte des Verhältnisses der beiden in ihr vorkommenden Coordinaten befriedigt, so verschwindet sie identisch und ihr wird also durch jeden Wert dieses Verhältnisses genügt.

Also: Schneidet eine Gerade drei Strahlen einer Regelschar, so schneidet sie die sämtlichen Geraden der Schar.

Nun lassen sich aber unendlich viele Gerade construieren, welche irgend drei gegebene Geraden schneiden. Denn die Schnittlinie je zweier entsprechender Ebenen der beiden projectivischen Ebenenbüschel, deren jeder die Punkte einer und derselben der drei Geraden

aus einer der beiden anderen als Axe projiciert, schneidet offenbar alle drei Geraden.

Aus dieser Construction folgt zugleich:

Alle Geraden, welche drei gegebene schneiden, bilden eine Regelschar und schneiden dieselben in drei Punctreihen, welche in Ansehung der Puncte, die auf derselben Geraden der Schar liegen, projectivisch sind.

Hieraus folgt wieder, daß die Regelschar, welche irgend drei Geraden einer anderen schneidet, alle Geraden derselben in projectivischen Punctreihen schneidet.

Es findet sich also zu jeder Regelschar eine andere vor; jede Gerade der einen schneidet sämtliche Geraden der anderen. Die hierdurch auf den Geraden der einen Schar durch die Geraden der anderen bestimmten Punctreihen sind zu einander projectivisch in Ansehung der Puncte, welche in derselben Geraden liegen. Es werden somit auch die Geraden einer jeden Schar aus irgend zwei Geraden der anderen als Axen durch projectivische Ebenenbüschel projiciert. Jede Schar wird die Leit-schar der anderen und jeder Strahl der einen ein Leitstrahl der anderen genannt. Beide Regelscharen zusammen bilden die Regelfläche.

Dieser Satz steht der Behauptung am Schlusse des vorhergehenden Satzes offenbar reciprok gegenüber.

Nach dem Gesetze der Reciprocität ergibt sich auch aus dem Satze, daß eine Gerade die Regelschar in zwei Puncten schneidet:

Durch jede Gerade lassen sich zwei Ebenen legen, deren jede eine Gerade einer Regelschar enthält.

Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn die Gerade eine Gerade einer Schar ist, denn dann enthält jede Ebene, welche durch sie hindurch gelegt wird, überdies eine Gerade der anderen Schar. Jede solche Ebene schneidet also die Regelfläche in zwei Geraden, die verschiedenen Scharen angehören; jede Gerade, die durch deren Durchschnittspunct geht, schneidet somit die Regelfläche nur in diesem und keinem weiteren Puncte. Man sagt deshalb, jede solche Ebene berühre die Regelfläche in diesem Puncte.

§ 53.

Fortsetzung.

Wir wollen nun auch die Gleichung der Berührungsebene in einem bestimmten Puncte der Regelfläche aufzustellen suchen. Es seien

$$E_1 + \varrho E_2 = 0, \quad E_1' + m \varrho E_2' = 0 \quad (1.)$$

die Gleichungen der Geraden der einen Regelschar, welche durch diesen Punct hindurchgeht, und

$$E_1 + \lambda E_1' = 0, \quad E_2 + m \lambda E_2' = 0 \quad (2.)$$

die der Geraden der anderen Regelschar.

Da die Berührungsebene jede dieser Geraden enthält, so müssen Constante k_1 und k_2 , μ_1 und μ_2 sich auffinden lassen (§ 10), vermöge welcher die Gleichung der Ebene sowohl durch

$$k_1 (E_1 + \varrho E_2) + k_2 (E_1' + m \varrho E_2') = 0,$$

als auch

$$\mu_1 (E_1 + \lambda E_1') + \mu_2 (E_2 + m \lambda E_2') = 0$$

darstellbar ist. Da beide Gleichungen dieselbe Ebene repräsentieren, so ist

$$\begin{aligned} k_1 (E_1 + \varrho E_2) + k_2 (E_1' + m \varrho E_2') \\ \equiv \mu_1 (E_1 + \lambda E_1') + \mu_2 (E_2 + m \lambda E_2'). \end{aligned}$$

Diese Identität kann aber nur bestehen, wenn

$$k_1 = \mu_1; \quad \varrho k_1 = \mu_2; \quad k_2 = \lambda \mu_1; \quad \varrho k_2 = \lambda \mu_2.$$

Die Gleichung der Berührungsebene ist somit:

$$E_1 + \varrho E_2 + \lambda (E_1' + m \varrho E_2') = 0. \quad (3.)$$

Wir können dieselbe leicht umformen, indem wir λ und ϱ durch die Coordinaten des Berührungspunctes ausdrücken. Bezeichnen (E_1) , (E_2) , (E_3) , (E_4) die Substitutionsresultate der Coordinaten des Berührungspunctes bezüglich in E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , so ist, weil dieser Punct der Durchschnittspunct der beiden Geraden (1.) und (2.) ist

$$\begin{aligned} (E_1) &= - \varrho (E_2); & (E_1') &= - \lambda (E_1') \\ (E_1') &= - m \varrho (E_2'); & (E_2) &= - m \lambda (E_2'). \end{aligned}$$

Durch die Substitution

$$\varrho = - \frac{(E_1')}{m (E_2')}; \quad \lambda = - \frac{(E_2)}{m (E_2')}; \quad m \varrho \lambda = \frac{(E_1)}{(E_2')}$$

geht daher die Gleichung der Berührungsebene (3.) über in

$$m (E_2') E_1 - (E_1') E_2 - (E_2) E_1' + m (E_1) E_2' = 0.$$

Die Ebenencoordinaten dieser Ebene sind daher nach den Coordinaten des Berührungspunctes linear und homogen.

Aus diesem Umstande ergiebt sich unmittelbar eine wichtige Folgerung:

Die Berührungsebenen an die Regelfläche in den Puncten einer ebenen Curve schneiden sich in einem Puncte.

Denn da nach der Voraussetzung der Berührungspunct in einer Ebene sich bewegt, so genügen seine Coordinaten einer linearen

Relation. Eliminieren wir nun mittelst dieser eine derselben aus der Gleichung der Berührungsebene, so sind die Ebenencoordinaten in derselben nach drei willkürlichen Grössen, den drei übrigen Coordinaten des Berührungspunctes, homogen und linear: sie stellt somit einen Strahlenbündel dar (§ 40). *Handwritten note: $\{x_1, x_2, x_3\} = \{a_1, a_2, a_3\} + \{b_1, b_2, b_3\}$*

Und reciprok: Die Berührungspuncte der Berührungsebenen, welche von einem Puncte aus an die Regelfläche gelegt werden, liegen in einem Kegelschnitte. *Handwritten note: $\{x_1, x_2, x_3\} = \{a_1, a_2, a_3\} + \{b_1, b_2, b_3\}$*

Denn die Ebenencoordinaten der Berührungsebene genügen dann einer linearen Relation. Da nun dieselben nach den Coordinaten des Berührungspunctes linear und homogen sind, so müssen auch diese eine lineare homogene Gleichung befriedigen, wie behauptet wurde.

2) Aus diesem Doppelsatze und der früher erwiesenen Thatsache, daß die Regelfläche eine Ebene in einem Kegelschnitte schneidet, fließen unmittelbar die Fundamentalsätze aus der Theorie der Kegelschnitte.

Zunächst ist der folgende Satz klar:

Das Erzeugnis zweier projectivischer Strahlenbüschel ist ein Kegelschnitt der durch ihre Mittelpuncte hindurchgeht.

Denn ziehen wir aus dem Mittelpuncte jedes der beiden Strahlenbüschel eine Gerade, welche die andere nicht schneidet und projicieren aus jeder dieser Geraden als Axe den Strahlenbüschel, dessen Mittelpunct sie enthält, so sind die beiden so entstehenden Ebenenbüschel in Ansehung der Ebenen, welche entsprechende Strahlen der beiden Büschel projicieren, zu einander projectivisch und erzeugen also eine Regelfläche. Diese schneidet somit die Ebene in dem Erzeugnisse der beiden projectivischen Strahlenbüschel und dasselbe ist daher als die Schnittfigur der Regelfläche mit der Ebene ein Kegelschnitt. *Handwritten note: $\{x_1, x_2, x_3\} = \{a_1, a_2, a_3\} + \{b_1, b_2, b_3\}$*

Die Umkehrung dieses Satzes folgt aus der Thatsache, daß durch jeden Kegelschnitt eine Regelfläche gelegt werden kann. Es läßt sich nämlich leicht eine Regelschar construieren, deren sämtliche Strahlen den Kegelschnitt und zwei willkürlich durch zwei Puncte des Kegelschnittes gezogene Leitstrahlen treffen. Sind O und O' die beiden Puncte, aus denen wir zwei Gerade bezüglich g und g' ziehen, die nicht in derselben Ebene liegen, so schneiden die Geraden, welche g und g' und den Kegelschnitt treffen, die beiden Geraden g und g' in zwei projectivischen Punctreihen. Denn suchen wir zu einem Puncte X von g den zugehörigen X' von g' , so erhalten wir denselben, indem wir durch X und g' eine Ebene legen und den Punct, in welchem die Ebene den Kegelschnitt außer O' schneidet, mit X verbinden. Also entspricht dem Puncte X ein einziger Punct

X' , und umgekehrt. Somit bilden die Geraden, deren jede den Kegelschnitt und die beiden Geraden g und g' schneiden, eine Regelschar.

Hieraus folgt unmittelbar: Die Strahlenbüschel, welche die Punkte eines Kegelschnittes aus irgend zweien derselben projicieren, sind projectivisch in Ansehung der Strahlen, welche denselben Punct des Kegelschnittes projicieren.

Denn legen wir durch den Kegelschnitt eine Regelschar, so wird dieselbe aus je zwei ihrer Leitstrahlen durch zwei projectivische Ebenenbüschel projiciert. Jeder derselben schneidet die Ebene des Kegelschnittes in einem zu ihm projectivischen Strahlenbüschel, daher sind diese beiden Strahlenbüschel selbst projectivisch in Ansehung der Strahlen, welche entsprechenden Ebenen der beiden Ebenenbüschel entsprechen, womit die obige Behauptung erwiesen ist.

Aus der Thatsache, daß durch einen Kegelschnitt sich stets eine Regelschar legen läßt und daß die Berührungsebenen an eine Regelfläche längs einem Kegelschnitte sich in einem Punkte schneiden, folgt ferner:

Je zwei Tangenten eines Kegelschnittes werden von den übrigen in zwei projectivischen Punctreihen geschnitten; den Berührungspuncten der beiden Tangenten entsprechen hierbei die in ihrem Durchschnittspuncte vereinigten Punkte.

Behufs des Beweises legen wir durch den Kegelschnitt eine Regelfläche. Die Berührungsebenen derselben längs dem Kegelschnitte schneiden sich in einem Punkte und jede derselben schneidet die Ebene des Kegelschnittes in einer Tangente desselben. Die Berührungsebenen projicieren aber die beiden Regelscharen der Regelfläche aus jenem Punkte, es werden also je zwei von allen übrigen in zwei Strahlenbüscheln geschnitten, die (§ 52) projectivisch sind in Ansehung der Strahlen, die in derselben dritten Berührungsebene liegen. Die Ebenen der Strahlenbüschel schneiden somit die Ebene des Kegelschnittes in zwei Punctreihen, welche zu je einem der Strahlenbüschel und daher unter einander projectivisch sind, und zwar entsprechen in den beiden Punctreihen einander die Punkte, welche auf derselben dritten Berührungsebene der Regelfläche, also auf derselben dritten Tangente des Kegelschnittes liegen. Der zweite Teil des Satzes ergibt sich am anschaulichsten, wenn wir uns die projectivischen Punctreihen auf den beiden Tangenten dadurch entstanden denken, daß eine dritte Tangente auf dem Kegelschnitte gleitet. In jeder ihrer Lagen bestimmt sie bei der Bewegung zwei entsprechende Punkte der beiden projectivischen Punctreihen; nähert sie sich nun unbegrenzt der einen der beiden Tangenten, so nähert

sich ihr Durchschnittspunct mit dieser unbegrenzt dem Berührungspuncte derselben und der Durchschnittspunct mit der zweiten Tangente unbegrenzt dem Durchschnittspuncte der beiden fixen Tangenten.

Es gilt aber auch die Umkehrung: Die Projectionsstrahlen zweier projectivischer Punctreihen, die in derselben Ebene liegen, umhüllen einen Kegelschnitt.

Wir projectieren die beiden projectivischen Punctreihen und ihre Projectionsstrahlen aus einem Punkte O des Raumes und zeigen zunächst, daß sich Regelflächen construieren lassen, welche alle diese Ebenen berühren. Zu dem Behufe ziehen wir in jeder der beiden Ebenen, die eine der beiden Punctreihen projectiert, eine Gerade, jedoch so, daß diese beiden Geraden g und g' nicht in derselben Ebene liegen. Die Punctreihen, welche auf diesen beiden Geraden von den übrigen Projectionsebenen projectiert werden, sind projectivisch in Ansehung der Punkte, welche durch dieselbe Ebene auf g und g' bestimmt werden. Die Regelschar, welche durch die Projectionsstrahlen der beiden projectivischen Punctreihen gebildet wird, berührt somit alle diese Ebenen. Nach dem Vorhergehenden berühren somit alle diese Ebenen einen bestimmten Kegelschnitt k , d. h. jede derselben hat mit ihm zwei zusammenfallende Punkte gemeinsam. Projectieren wir daher diesen Kegelschnitt von O auf die Ebene E der beiden gegebenen projectivischen Punctreihen, so wird die Projection des Kegelschnittes von allen Projectionsstrahlen dieser beiden Punctreihen berührt. Nun wird aber k aus irgend zwei seiner Punkte durch zwei projectivische Strahlenbüschel projectiert, die selbst wieder aus O durch zwei projectivische Ebenenbüschel projectiert werden. Die Projection von k auf E ist daher das Erzeugnis der Projectionen dieser beiden Strahlenbüschel auf E , also ein Kegelschnitt. Es werden somit die sämtlichen Projectionsstrahlen der beiden gegebenen projectivischen Punctreihen von einem Kegelschnitte berührt.

§. 54.

Der Kegel und Ebenenbüschel der zweiten Ordnung.

1) Sind

$$E_1 + \lambda E_2 = 0, \quad E_1' + m\lambda E_2' = 0$$

die Gleichungen der beiden projectivischen Ebenenbüschel, die eine Regelschar erzeugen, so bestimmen die beiden projectivischen Ebenenbüschel

$$E_1 + \lambda E_1' = 0, \quad E_2 + m\lambda E_2' = 0$$

die zweite Regelschar der Regelfläche. Schneiden sich nun die Axen

der beiden Ebenenbüschel, so existieren vier Constante k_1, k_2, k_3, k_4 , welche die Identität liefern

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_1' E_1' + k_2' E_2' \equiv 0.$$

Setzen wir der Kürze halber

$$E \equiv E_1 + \lambda E_1', \quad E' \equiv E_2 + m \lambda E_2',$$

so ist

$$\begin{aligned} k_1 E + k_2 E' &= k_1 E_1 + k_2 E_2 + \lambda (k_1 E_1' + m k_2 E_2') \\ &= (\lambda k_1 - k_1') E_1' + (m \lambda k_2 - k_2') E_2', \end{aligned}$$

folglich ist die Ebene $k_1 E + k_2 E' = 0$ eine Ebene des Büschels $(E_1' E_2')$. Ebenso ist

$$\begin{aligned} m k_1' E + k_2' E' &= m k_1' E_1 + k_2' E_2 + m \lambda (k_1' E_1 + k_2' E_2) \\ &= m k_1' E_1 + k_2' E_2 - m \lambda (k_1 E_1 + k_2 E_2) \\ &= -m (\lambda k_1 - k_1') E_1 - (m \lambda k_2 - k_2') E_2. \end{aligned}$$

Daher ist die Ebene $m k_1' E + k_2' E' = 0$ eine Ebene des Büschels $(E_1 E_2)$. Der Parameter μ dieser Ebene, aufgefaßt als Ebene des Büschels $E_1 + \lambda E_2 = 0$ ist $\mu = \frac{m \lambda k_2 - k_2'}{m (\lambda k_1 - k_1')}$ jener μ' der Ebene

$$k_1 E + k_2 E' = 0,$$

betrachtet als Ebene des Büschels $E_1' + m \lambda E_2' = 0$, hingegen

$$\mu' = \frac{m \lambda k_2 - k_2'}{\lambda k_1 - k_1'},$$

also ist $\mu' = m \mu$. Diese beiden Ebenen sind somit zwei entsprechende Ebenen der beiden die erste Regelschar erzeugenden Büschel. Ihre Schnittlinie ist daher eine Gerade dieser Schar, sie ist aber auch eine Gerade der zweiten Schar, denn sie ist die Schnittlinie der beiden Ebenen $E \equiv E_1 + \lambda E_1'$ und $E' \equiv E_2 + m \lambda E_2'$. Wir haben somit den Satz:

Schneiden sich die Axen zweier projectivischen Ebenenbüschel, so fallen die beiden durch sie bestimmten Regelscharen in eine zusammen und die Geraden derselben gehen durch den Durchschnittspunct der beiden Axen.

Das hierdurch entstehende Gebilde wird ein Kegel zweiter Ordnung genannt, der Durchschnittspunct seiner Strahlen die Spitze des Kegels.

Von ihm gelten offenbar mehrere Sätze, die soeben § 52 von der Regelfläche, als deren Abart er sich ergab, bewiesen wurden.

Eine Gerade, die nicht ein Strahl eines Kegels ist, kann denselben in nicht mehr als zwei Puncten schneiden. Die sämtlichen Strahlen eines Kegels werden aus irgend zweien als Axen durch projectivische Ebenenbüschel projiciert.

Eine Ebene schneidet den Kegel in einem Kegelschnitte, welcher in ein Linienpaar, oder eine Doppelinie zerfällt, sobald die Ebene durch die Spitze des Kegels geht.

Der zweite Teil dieses Satzes, der unmittelbar aus dem ersten folgt, läßt sich auch mittelst der Gleichung des Kegels beweisen.

Die Gleichung der Regelfläche war

$$m E_1 E_2' - E_2 E_1' = 0.$$

Die Regelfläche geht in einen Kegel über, sobald sich diese vier Ebenen in einem Punkte, also die Axen der beiden Ebenenbüschel $(E_1 E_2)$ und $(E_1' E_2')$ sich schneiden. Die beiden Ebenenbüschel haben also dann eine Ebene, die ihrer Axen gemeinsam. Wir wollen annehmen, daß diese Ebene, betrachtet als Ebene des ersten Büschels, die Ebene $E_1 = 0$ und als Ebene des zweiten die Ebene $E_2' = 0$ sei. Es besteht also dann eine Constante n , vermöge welcher

$$E_2' \equiv n E_1.$$

Die Gleichung des Kegels hat somit unter diesen Voraussetzungen die Form

$$m n E_1^2 - E_2 E_1' = 0.$$

Geht nun eine Ebene $E = 0$ durch die Spitze des Kegels, so müssen drei Constante ϱ_1 , ϱ_2 und ϱ auffindbar sein, durch welche

$$\varrho E \equiv \varrho_1 E_1 + \varrho_2 E_2 + E_1'$$

wird.

Die Coordinaten der Punkte, welche dem Kegel und dieser Ebene gemein sind, müssen somit den beiden vorstehenden Gleichungen genügen. Wir können jedoch die eine derselben durch jene ersetzen, welche mittelst Elimination der GröÙe E_1' gewonnen wird, also durch

$$m E_1 n E_1^2 - E_2 (\varrho_1 E_1 + \varrho_2 E_2 - E) = 0,$$

oder

$$m n E_1^2 - \varrho_1 E_1 E_2 - \varrho_2 E_2^2 + E E_2 = 0.$$

Verwandeln wir nun den Ausdruck

$$m n E_1^2 - \varrho_1 E_1 E_2 - \varrho_2 E_2^2$$

in das Product

$$(p E_1 + q E_2) (r E_1 + s E_2),$$

so nimmt die obige Gleichung die Form an

$$(p E_1 + q E_2) (r E_1 + s E_2) + E E_2 = 0.$$

Somit gehören alle Punkte, deren Coordinaten dieser Gleichung und der Gleichung $E = 0$ genügen, der Schnittfigur der Ebene und des Kegels an. Es sind dies somit die Punkte der Durchschnittslinien der Ebene $E = 0$ mit jeder der beiden Ebenen

$$p E_1 + q E_2 = 0 \quad \text{und} \quad r E_1 + s E_2 = 0.$$

Je nachdem nun diese beiden Ebenen reell sind, zusammenfallen oder imaginär sind, schneidet die Ebene den Kegel in zwei reellen, zwei zusammenfallenden oder zwei imaginären Geraden.

Die Ebene, welche mit dem Kegel nur einen Strahl gemeinsam hat, wird dessen Berührungsebene längs dieses Strahles genannt. Jede Gerade, welche in derselben gezogen wird, hat mit dem Kegel zwei zusammenfallende Punkte gemeinsam und wird deshalb eine Tangente des Kegels genannt. Die Schnittlinie der Berührungsebene mit irgend einer anderen Ebene berührt somit den Kegelschnitt, welcher vom Kegel in dieser Ebene ausgeschnitten wird.

2) Dem eben behandelten Falle, daß die Axen der beiden projectivischen die Regelfläche erzeugenden Ebenenbüschel sich schneiden, steht nach dem Gesetze der Reciprocität der Fall gegenüber, daß bei der reciproken Erzeugungsweise der Regelschar durch zwei projectivische Punctreihen die Träger derselben in einer Ebene liegen. Die Projectionsstrahlen derselben umhüllen dann, wie eben bemerkt wurde (§ 53) einen Kegelschnitt. Die Gesamtheit dieser Projectionsstrahlen wird auch oft der Strahlenbüschel der zweiten Ordnung genannt.

Projiciert man dieses Gebilde aus irgend einem Punkte des Raumes, so wird der Kegelschnitt durch einen Kegel, jeder Projectionsstrahl durch eine Berührungsebene desselben und die beiden projectivischen Punctreihen durch zwei projectivische Strahlenbüschel projiciert. Die Ebenen, welche je zwei entsprechende Strahlen dieser beiden projectivischen Strahlenbüschel verbinden, umhüllen somit einen Kegel. Wir gewinnen so den Satz:

Die Ebenen, welche durch die entsprechenden Strahlen zweier projectivischen concentrischen Strahlenbüschel bestimmt werden, umhüllen einen Kegel. Die Gesamtheit dieser Ebenen wird ein Ebenenbüschel der zweiten Ordnung genannt.

Es steht dieses Gebilde dem Kegelschnitte reciprok gegenüber. Der Ebene des Kegelschnittes entspricht das gemeinsame Centrum der beiden Strahlenbüschel, jedem Punkte desselben, als dem Durchschnitte zweier entsprechender Strahlen projectivischer Büschel eine der umhüllenden Ebenen, jeder Tangente der Durchschnitt zweier nicht benachbarter umhüllenden Ebenen, also ein Strahl des Kegels.

Auch die Ebenen, welche durch die entsprechenden Elemente einer Punctreihe und eines zu ihr projectivischen Strahlenbüschels bestimmt werden, bilden offenbar einen solchen Ebenenbüschel der zweiten Ordnung. Denn diese Ebenen schneiden die Ebene, welche durch den Träger der Punctreihe und den Mittelpunkt des Strahlen-

büschels gelegt wird, in einem Strahlenbüschel, der zur Punctreihe und somit zum ersten Strahlenbüschel projectivisch ist in Ansehung jener Strahlen, die in derselben Ebene liegen. Somit erscheinen diese Ebenen als die Verbindungsebenen je zweier entsprechender Strahlen zweier concentrischer projectivischer Strahlenbüschel und bilden daher einen Ebenenbüschel der zweiten Ordnung.

§ 55.

Die perspectivische Lage der einförmigen Grundgebilde.

Wir gelangten von der Regelschar zum Begriffe des Kegels durch die Voraussetzung, daß die Axen der beiden erzeugenden Ebenenbüschel sich schneiden, somit beide Ebenenbüschel eine Ebene gemeinsam haben. Im Allgemeinen werden in dieser Ebene nicht zwei entsprechende Ebenenbüschel zusammenfallen und dieser allgemeinere Fall war es, der im Vorhergehenden untersucht wurde. Nehmen wir nun speciell an, daß in den beiden projectivischen Ebenenbüscheln zwei entsprechende Ebenen zusammenfallen, so erhalten wir als eine Abart des Kegels, die Ebene. Fällt etwa die Ebene $E_1 = 0$ mit der Ebene $E_1' = 0$ zusammen, ist also $E_1 \equiv m'E_1'$, so zerfällt die Gleichung der Regelfläche

$$m E_1 E_2' - E_2 E_1' = 0$$

in das Product

$$E_1 (m E_2' - m' E_2) = 0$$

und somit die Regelfläche in die beiden Ebenen

$$E_1 = 0 \text{ und } m E_2' - m' E_2 = 0.$$

Es stellen sich also diese beiden Ebenen als das Erzeugnis der beiden projectivischen Ebenenbüschel dar. Da nun die Ebene $E_1 = 0$ beiden Ebenenbüscheln gemeinsam ist, so schneiden sich je zwei entsprechende Ebenen derselben auf der Ebene $m E_2' - m' E_2 = 0$, die deshalb auch allein als das Erzeugnis der beiden Ebenenbüschel angesehen werden kann.

Die reciproke Betrachtung lehrt, daß zwei projectivische Punctreihen, in deren gemeinsamen Puncte zwei entsprechende Puncte vereinigt liegen, eine in zwei Puncte zerfallende Regelfläche erzeugen. Der eine derselben ist der Schnittpunct der beiden Punctreihen und in dem anderen schneiden sich sämtliche Projectionsstrahlen der beiden Punctreihen. Wir erhalten auf diese Weise die beiden reciproken Sätze:

Fallen zwei entsprechende	Sind im Durchschnittspuncte
Ebenen zweier projectivischer	zweier projectivischer Punctreihen

Ebenenbüschel zusammen, so liegen die Durchschnittslinien aller anderen Paare entsprechender Ebenen in einer Ebene.	zwei entsprechende Punkte vereinigt, so gehen die sämtlichen Projectionsstrahlen derselben durch einen Punkt.
---	---

Aus diesen beiden Sätzen folgt unmittelbar:

Liegen zwei projectivische Strahlenbüschel in einer Ebene und sind in ihrem gemeinsamen Strahl zwei entsprechende Strahlen vereinigt, so liegen die Schnittpunkte aller anderen Paare entsprechender Strahlen in einer Geraden.	Haben zwei projectivische Strahlenbüschel denselben Mittelpunkt und sind in der Schnittlinie ihrer Ebenen zwei entsprechende Strahlen vereinigt, so schneiden sich die Ebenen, die durch alle anderen Paare entsprechender Strahlen bestimmt werden, in einer Geraden.
---	--

Denn projiciert man in dem Satze links die beiden projectivischen Strahlenbüschel aus einem Punkte des Raumes, so ist jeder der beiden Ebenenbüschel, der einen der Strahlenbüschel projiciert, zu diesem projectivisch, und somit sind sie unter einander projectivisch. Da nun ferner in ihrer gemeinsamen Ebene zwei entsprechende Ebenen vereinigt sind, so schneiden sich die übrigen Paare entsprechender Ebenen in einer Ebene und somit die Paare entsprechender Strahlen der beiden Strahlenbüschel in der Durchschnittslinie der Ebene der Strahlenbüschel mit dieser Ebene.

Durch die reciproke Betrachtung, indem man die beiden Strahlenbüschel durch eine Ebene schneidet, wird der Satz rechts bewiesen.

Zwei gleichartige projectivische einförmige Gebilde, in deren gemeinsamen Elemente zwei entsprechende Elemente vereinigt sind, werden perspectivisch oder in perspectivischer Lage genannt. Sie erzeugen in dieser Lage stets wieder ein einförmiges Gebilde. Ebenso werden zwei ungleichartige projectivische einförmige Grundgebilde, deren entsprechende Elemente in einander liegen, perspectivisch oder in perspectivischer Lage genannt.

Diese Lage tritt ein (§ 46) sobald drei Paare entsprechender Elemente der beiden Gebilde vereinigt sind.

§ 56.

In einander liegende einförmige projectivische Grundgebilde.

Während bisher angenommen wurde, daß nur ein Paar Elemente der beiden projectivischen Grundgebilde zusammenfalle, wollen wir nun voraussetzen, daß dieselben zwei Paare gemeinsam haben. Es fallen dann offenbar die Träger der beiden Grundgebilde zusammen und wir sagen, daß die einförmigen Gebilde in einander liegen, bei

Ebenen- und Strahlenbüscheln auch, daß sie concentrisch sind. Liegen die beiden projectivischen Grundgebilde

$$U + \lambda V = 0, \quad U' + m\lambda V' = 0$$

in einander, so können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, stets annehmen, daß $U' \equiv nV$ sei und $V \equiv pU + qV$, wodurch die Gleichung des zweiten Gebildes in

$$U + \frac{n + mq\lambda}{mp\lambda} V = 0$$

übergeht.

Die Gleichung des Erzeugnisses der beiden Grundgebilde

$$mUV' - U'V = 0$$

erhält durch diese Annahmen die Form:

$$mpU^2 + mqUV - nV^2 = 0.$$

Den Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen kann man offenbar in das Product zweier nach U und V linearen Factoren zerlegen. Bezeichnen wir das Verhältniß $\frac{U}{V}$ mit x , so erhalten wir dieselben, indem wir die Gleichung

$$mpx^2 + mqx - n = 0$$

in die beiden Wurzelfactoren zerlegen und hierin $x = \frac{U}{V}$ setzen. Der Coefficient von V in jedem der beiden linearen Ausdrücke ist somit eine Wurzel der Gleichung

$$mpx^2 - mqx - n = 0,$$

daher ist

$$x = \frac{mqx + n}{mpx}.$$

Somit fällt jedes der beiden Elemente $U + xV = 0$ mit seinem entsprechenden in dem Gebilde $U + \frac{mq\lambda + n}{mp\lambda} V = 0$ oder $U' + m\lambda V' = 0$ zusammen.

Als Erzeugnis zweier in einander liegender gleichartiger Grundgebilde der I. Stufe stellen sich somit zwei Paare zusammenfallender entsprechender Elemente der beiden Gebilde dar. Man nennt dieselben aus diesem Grunde gemeinschaftliche oder Doppelemente der beiden in einander liegenden Grundgebilde. Da die Bestimmung derselben von einer Gleichung zweiten Grades abhängt, so sind beide reell, oder fallen in eines zusammen, oder beide sind imaginär, je nachdem die Gleichung zwei reelle oder zwei gleiche oder zwei complexe Wurzeln besitzt.

Liegen zwei gleichartige einförmige projectivische Grundgebilde in einander, so fallen zwei Paare entspre-

chender Elemente derselben zusammen, die entweder reell sind, oder sich in eines vereinigen, oder imaginär sind*).

Wir sind hier wieder veranlaßt, imaginäre Werte der Coefficienten und Veränderlichen bei geometrischen Untersuchungen zu berücksichtigen, und wollen wir nicht der Allgemeinheit der Untersuchungen und Sätze Eintrag thun, so sind wir, wie wir uns wiederholt überzeugt haben, genötigt dieselben ebenso wie die reellen in die geometrischen Betrachtungen hineinzuziehen. Haben dieselben zwar kein anschauliches Substrat, so können wir doch analytisch mit ihnen alle Operationen so durchführen, als hätten wir es mit reellen Gebilden zu thun. Ja durch Vereinigung verschiedener imaginärer Elemente können reelle erzeugt werden, deren Bedeutung bei Ausschließung jener uns verloren ginge.

§ 57.

Die involutorische Lage.

Die Lagebeziehung der Elemente zweier in einander liegenden projectivischen Grundgebilde verdient besondere Beachtung, wenn ihre Verwandtschaftsgleichung nach den beiden Parametern symmetrisch ist. Dieselbe hat dann die Form

$$a\lambda\lambda' + b(\lambda + \lambda') + c = 0.$$

Da die beiden einförmigen Grundgebilde in einander liegen, so können wir die Elemente jedes derselben auf dieselben Elemente ihres gemeinsamen Trägers $U = 0$ und $V = 0$ als Grundelemente beziehen. Die Gleichungen der beiden projectivischen Grundgebilde seien dann

$$U + \lambda V = 0 \quad \text{und} \quad U + \lambda' V = 0.$$

Jedes Element des Trägers können wir nun in zweifacher Weise auffassen: sowohl als Element des ersten, als auch des zweiten Grundgebildes. Ist α der Parameter, durch den das Element bestimmt wird und sehen wir es als Element des ersten Gebildes an, so erhalten wir sein entsprechendes im zweiten Gebilde, indem wir aus der Verwandtschaftsgleichung das λ' berechnen, das zu $\lambda = \alpha$ gehört. Ist derselbe $\lambda' = \beta$, so ergibt sich wegen der Symmetrie der Gleichung bezüglich λ und λ' , für $\lambda = \beta$ wieder $\lambda' = \alpha$. Somit:

Jedem Elemente des Trägers der beiden in einander liegenden projectivischen Gebilde, mag man es als Element irgend welches der beiden Gebilde betrachten, entspricht immer ein und dasselbe andere Element des Trägers.

*) Hieraus folgt unmittelbar, daß jene Ebene, die durch die Spitze des Kegels geht, denselben in zwei reellen, zusammenfallenden oder imaginären Strahlen schneidet. Denn dieselben sind die Doppelstrahlen zweier concentrischer Strahlenbüschel.

Dies tritt offenbar schon ein, sobald bei zwei in einander liegenden projectivischen Grundgebilden ein Paar Elemente existiert, deren jedes stets dem anderen entspricht, mag man es als Element des einen oder anderen Gebildes betrachten. Denn ist

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0$$

die Verwandtschaftsgleichung der beiden Gebilde, so existieren demnach zwei Werte λ und λ' , welche gleichzeitig den beiden Gleichungen genügen

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0, \quad a\lambda\lambda' + b\lambda' + c\lambda + d = 0,$$

was nur für $b = c$ möglich ist.

Also: Liegen zwei projectivische einförmige Grundgebilde in einander und entspricht einem bestimmten Elemente ihres Trägers stets ein und dasselbe andere, so entspricht jedem Elemente desselben, mag es als Element irgend welches der beiden Grundgebilde angesehen werden, ein und dasselbe andere Element*).

Zwei in einander liegende projectivische Grundgebilde, deren Elemente derart gepaart erscheinen, werden involutorische Gebilde oder in involutorischer Lage genannt. Die einander entsprechenden Elemente heißen conjugiert involutorische Elemente. Zur Bestimmung ihrer Doppelemente erhalten wir die Gleichung

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0.$$

Je nachdem dieselbe zwei reelle, gleiche oder imaginäre Wurzeln besitzt, sind die Doppelemente reell, fallen zusammen oder sind imaginär.

Wir können diese Gleichung benutzen, um in der Gleichung der Involution die Verhältnisse der drei Größen a , b und c durch die Parameter der Doppelemente auszudrücken. Sind etwa λ_1 und λ_2 die Wurzeln der obigen Gleichung, so ist

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2b}{a}; \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a}$$

und die Gleichung (1.) geht somit über in

$$\lambda\lambda' - (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda + \lambda') + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Dieselbe lehrt: Je zwei conjugierte Elemente der Involution werden durch deren Doppelemente harmonisch getrennt.

*) Hieraus folgt, daß zwei in einander liegende projectivische Punctreihen involutorisch liegen, wenn ihre Gegenpunkte zusammenfallen. Und umgekehrt: Zwei projectivische Ebenen- oder Strahlenbüschel, wenn die ungleichnamigen Elemente ihrer entsprechenden rechten Winkel zusammenfallen. Und umgekehrt.

Denn dieselbe ist identisch mit

$$\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda - \lambda_2} : \frac{\lambda_1 - \lambda'}{\lambda' - \lambda_2} = -1 = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda \lambda').$$

Da die Gleichung der Involution bloß zwei Constante hat, das Verhältniß zweier der Größen a, b, c zur dritten, so folgt:

Die Involution ist bestimmt, sobald zwei Paare conjugierter Elemente derselben gegeben sind. ••

Zwei involutorische Gebilde der I. Stufe fallen zusammen, wenn sie zwei Paare conjugierter Elemente gemeinsam haben.

§ 58.

Fortsetzung.

Wir können die Involution auch durch eine quadratische Gleichung darstellen, deren einzelne Coefficienten von einem Parameter abhängen und deren Wurzeln für jeden Wert des Parameters ein conjugiertes Elementepaar bestimmen.

Setzen wir nämlich, wenn λ und λ' die Parameter zweier conjugierten Elemente bedeuten,

$$\lambda \lambda' = p, \quad \lambda + \lambda' = \sigma,$$

so sind $\lambda + \lambda'$ die Wurzeln der Gleichung

$$\xi^2 - \sigma \xi + p = 0. \quad (2.)$$

λ und λ' erfüllen aber auch die Involutionsgleichung, es ist also

$$ap + b\sigma + c = 0. \quad (3.)$$

Zu je zwei Werten von p und σ , welche dieser Gleichung genügen, liefert die quadratische Gleichung in ξ das zugehörige Elementepaar. Wir können somit eine der Größen p oder σ stets willkürlich wählen, die Substitution der anderen aus Gleichung (3.) in (2.) giebt dann die Gleichung zur Bestimmung des Elementepaares. Eliminieren wir daher etwa p aus diesen beiden Gleichungen, so sind die Wurzeln der hieraus resultierenden Gleichung

$$a\xi^2 - c - \sigma(a\xi + b) = 0,$$

in welcher also σ eine willkürliche GröÙe ist, stets die Parameter zweier conjugierter Elemente der Involution.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß die Wurzeln der Gleichung

$$ax^2 + bx + c + \lambda(a'x^2 + b'x + c') = 0,$$

in der die willkürliche GröÙe λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, die Parameter der conjugierten Elementepaare einer Involution darstellen. Denn sind μ und μ' die Wurzeln derselben, so ist

$$\mu + \mu' = -\frac{b + b'\lambda}{a + a'\lambda}, \quad \mu\mu' = \frac{c + c'\lambda}{a + a'\lambda}.$$

Hieraus ergibt sich durch Elimination des λ , daß μ und μ' durch die Gleichung zusammenhängen

$$(ab' - a'b) \mu \mu' + (a'c - ac') (\mu + \mu') + (b'c - bc') = 0.$$

Da dieselbe nach μ und μ' linear und symmetrisch ist, so ist sie die Gleichung einer Involution. Jedem Werte des λ gehört ein Elementepaar der Involution zu. Dieses Elementepaar fällt in eines zusammen und wir erhalten ein Doppelement der Involution, sobald die beiden Wurzeln der Gleichung einander gleich werden, sobald also λ Werte annimmt, für welche die Discriminante der Gleichung verschwindet. Dieselben sind somit die Wurzeln der nach λ quadratischen Gleichung

$$(b + \lambda b')^2 - 4(c + \lambda c')(a + \lambda a') = 0$$

und wir sehen hiermit wieder unsere frühere Bemerkung bestätigt, daß eine Involution zwei Doppelemente besitzt.

Anmerkung. Diese Darstellungsweise der Involution zeigt unmittelbar die Möglichkeit ihren Begriff zu verallgemeinern. Danach wird man unter einer Involution n^{ten} Grades den Inbegriff der Punctegruppen verstehen, welche sich aus $a_x^n + \lambda b_x^n = 0$, — wo a_x^n und b_x^n Polynome n^{ten} Grades nach x sind — ergeben, wenn der Parameter λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. Die Parameter der Doppelemente der Involution sind wieder die Wurzeln der Discriminante des Ausdruckes nach λ .

§ 59.

Mit den bisher betrachteten Gebilden ist der Kreis der Gebilde abgeschlossen, welche durch zwei projectivische einförmige Grundgebilde erzeugt werden können, wovon uns ein kurzer Rückblick überzeugen wird. Von den möglichen Zusammenstellungen zu zweien, die wir aus den Grundgebilden: Ebenenbüschel, Strahlenbüschel und Punctreihe bilden können, haben wir zunächst das Erzeugnis zweier projectivischer Ebenenbüschel behandelt, das sich als identisch mit dem Erzeugnis zweier projectivischer Punctreihen erwies. Von den anderweitigen Zusammenstellungen bestimmen offenbar nur bei zwei concentrischen projectivischen Strahlenbüschel im Raume, einer Punctreihe und einem zu ihr projectivischen Strahlenbüschel, ferner einem Ebenenbüschel und einem zu ihm projectivischen Strahlenbüschel, die entsprechenden Elemente eine unendliche Anzahl neuer Elemente und können somit zur Entstehung neuer Gebilde — außer Punct und Ebene — Veranlassung geben. Als diese Gebilde ergab sich der Ebenenbüschel der zweiten Ordnung, während das Erzeugnis eines Strahlenbüschels und eines zu ihm projectivischen Ebenenbüschels zu einem bekannten ebenen Gebilde, dem Kegelschnitte, führte.

Die letzte noch unberücksichtigte Zusammenstellung ist der Ebenenbüschel und eine zu ihm projectivische Punctreihe. Bei derselben entfällt offenbar die Frage nach dem Erzeugnis der beiden Gebilde und wir können sie nur ersetzen durch die nach der Incidenz entsprechender Elemente.

Da nun der Ebenenbüschel auf dem Träger der Punctreihe eine zu dieser projectivische Punctreihe projiciert, so liegen die Puncte, welche Doppelpuncte dieser beiden Punctreihen sind (§ 56) in den entsprechenden Ebenen des Ebenenbüschels.

Ein Ebenenbüschel und eine zu ihm projectivische Punctreihe haben zwei Paare incidenter entsprechender Elemente.

§ 60.

Ü b u n g e n.

1) Die Mitte der beiden Doppelpuncte zweier in einander liegender projectivischer Punctreihen ist die Mitte der Gegenpuncte der beiden Punctreihen.

Anl. Ergiebt sich unmittelbar aus § 46 Aufgabe 1.

2) Die Gerade, welche den Winkel der beiden Doppelstrahlen zweier concentrischer projectivischer Strahlenbüschel halbiert, halbiert auch den von ungleichnamigen Schenkeln der beiden entsprechenden rechten Winkel gebildeten Winkel.

Anl. § 46 Aufgabe 2.

3) Sind zwei projectivische Punctreihen involutorisch, so fallen ihre Gegenpuncte zusammen. Bezeichnet man diesen Punct, den Centralpunct der Involution, mit O , und mit X und X' irgend ein Paar conjugiert involutorischer Puncte, so ist

$$OX \cdot OX' = \text{Const.}$$

Und umgekehrt: Sind die Puncte einer Geraden einander derart paarweise zugeordnet, daß sie dieser Relation genügen, so bilden sie eine Involution, deren Centralpunct O ist.

4) Sind zwei projectivische Ebenenbüschel involutorisch, so fallen die nicht entsprechenden Schenkel der beiden entsprechenden rechten Winkel zusammen; bezeichnet man irgend einen derselben mit τ und mit ξ und ξ' irgend ein Paar conjugiert involutorische Ebenen, so ist

$$\tan \tau \xi \tan \sigma \xi' = \text{Const.}$$

Und umgekehrt: Sind die Ebenen eines Ebenenbüschels einander derart paarweise zugeordnet, daß sie dieser Relation genügen, so bilden sie eine Involution.

5) Welche Bedingungsgleichung müssen die Parameter dreier Elementenpaare erfüllen, damit sie derselben Involution angehören?

Anl. Sind $\lambda_1, \lambda_1'; \lambda_2, \lambda_2'; \lambda_3, \lambda_3'$ die Parameter dieser Elementenpaare, so ist die gesuchte Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \lambda_1', & (\lambda_1 + \lambda_1'), & 1 \\ \lambda_2 \lambda_2', & (\lambda_2 + \lambda_2'), & 1 \\ \lambda_3 \lambda_3', & (\lambda_3 + \lambda_3'), & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Umformung dieser Determinante läßt sich die gesuchte Bedingungsgleichung in verschiedenen Formen darstellen. Multipliziert man diese Determinante mit

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^0, & \lambda_2^0, & \lambda_3^0 \\ \lambda_1^1, & \lambda_2^1, & \lambda_3^1 \\ \lambda_1^2, & \lambda_2^2, & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = -(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1),$$

so ergibt sich:

$$-\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2')(\lambda_2 - \lambda_3')(\lambda_3 - \lambda_1') + (\lambda_1' - \lambda_2)(\lambda_2' - \lambda_3)(\lambda_3' - \lambda_1) = 0.$$

Da nun Δ ungeändert bleibt, wenn man darin λ_1 mit λ_1' , oder λ_2 mit λ_2' , oder λ_3 mit λ_3' vertauscht, so ergeben sich aus dieser Formel drei weitere Formeln.

Wird die Determinante Δ mit

$$\begin{vmatrix} m^0, & \lambda_1^0, & \lambda_1'^0 \\ m^1, & \lambda_1^1, & \lambda_1'^1 \\ m^2, & \lambda_1^2, & \lambda_1'^2 \end{vmatrix} = -(\lambda_1 - \lambda_1')(\lambda_1' - m)(m - \lambda_1)$$

multipliziert, so findet man

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2')(\lambda_1' - \lambda_3)(\lambda_1' - \lambda_3') \\ & - (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3')(\lambda_1' - \lambda_2)(\lambda_1' - \lambda_2') = 0, \end{aligned}$$

aus welcher Formel sich zwei weitere durch Vertauschung der Indices 1 und 2 oder 1 und 3 ergeben.

6) Drehen sich n Seiten eines veränderlichen n -Seits um n feste Gerade, während $(n - 1)$ Kanten desselben sich auf $(n - 1)$ festen Ebenen des durch das n -Seit gegebenen Strahlenbündels bewegen, so beschreibt die n^{te} Kante eine Kegelfläche oder eine Ebene, wenn die n festen Geraden in einer Ebene liegen.

Bewegen sich die n Kanten eines veränderlichen n -Kants in n festen Ebenen, während $(n - 1)$ Seiten desselben sich um $n - 1$ Strahlen des durch das n -Kant gegebenen Strahlenbündels drehen, so umhüllt die n^{te} Seite entweder eine Kegelfläche (Ebenenbüschel der zweiten Ordnung), oder einen Punkt, wenn die n festen Ebenen sich in einer Geraden schneiden.

7) Eine Ebene dreht sich um eine feste Gerade und ihre jedesmaligen Durchschnittslinien mit zwei festen Ebenen werden mit einem Punkte durch Ebenen verbunden; welche Fläche bilden die Durchschnittslinien aller dieser Ebenenpaare?

Wie lautet der reciproke Satz?

8) Von den Puncten einer Punctreihe werden auf die entsprechenden Ebenen eines zur Punctreihe projectivischen Ebenenbüschels Senkrechte gefällt; zu zeigen, daß dieselben eine Regelschar bilden.

Anl. Man zeige, daß diese Senkrechten die unendlich ferne Ebene in einer zur gegebenen projectivischen Punctreihe schneiden.

9) Durch jeden Punct einer Punctreihe wird eine Parallele zu seinem entsprechenden Strahle eines projectivischen Strahlenbüschels gezogen; welche Fläche bilden diese Parallelen?

Anl. wie 8.

10) Werden auf eine Regelfläche in den sämtlichen Puncten eines in ihr gelegenen Strahles Normalen, d. h. eine Senkrechte auf die Berührungsebenen des betreffenden Punctes errichtet, so bilden dieselben eine Regelschaar.

Anl. folgt mittelst 8.

11) Zieht man durch einen Punct zu sämtlichen Strahlen einer Regelschaar Parallele, so bilden diese Geraden einen Kegel oder eine Ebene.

Anl. Ergiebt sich aus § 53 angewandt auf die unendlich ferne Ebene als Schnitt- oder Berührungsebene der Regelfläche. Eine Regelfläche, welche die unendlich ferne Ebene schneidet, wird einfaches Hyperboloid, welche sie berührt, hyperbolisches Paraboloid genannt.

12) In welchen Curven der zweiten Ordnung kann ein einfaches Hyperboloid, oder ein hyperbolisches Paraboloid geschnitten werden?

Neuntes Capitel.

Projectivische Verwandtschaft zwischen den Grundgebilden der zweiten Stufe.

§ 61.

Auch die Elemente zweier Grundgebilde der zweiten Stufe können wir in mannigfache Beziehung zu einander setzen, indem wir die Parameter, welche in den Gleichungen dieser Grundgebilde auftreten, durch ein oder zwei Gleichungen mit einander verbinden. Wir wollen nun zunächst den Fall in Betracht ziehen, daß diese Gleichungen linear seien; aber auch hier werden wir bei der Verbindung der Parameter durch zwei Gleichungen, falls wir eine eindeutige Beziehung zwischen den Elementen der beiden Grundgebilde herstellen wollen, die Form derselben einer gewissen Beschränkung unterwerfen müssen.

Es seien

$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0$ und $k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 = 0$ (1.)
die beiden Grundgebilde. Die Elemente des ersten Grundgebildes, die durch die Wertgruppen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bestimmt werden, sollen dessen U -Elemente, und analog die Elemente des zweiten Grundgebildes, welche den Wertgruppen k_1, k_2, k_3 entsprechen, dessen V -Elemente der Kürze halber genannt werden. Wir wollen nun die Beziehung erörtern, in welche die Elemente der beiden Grundgebilde treten, wenn deren Parameter durch eine nach denselben lineare Gleichung mit einander verbunden werden. Dieselbe werde repräsentiert durch

$$(a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3)k_1 + (a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{23}\lambda_3)k_2 + (a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3)k_3 \equiv \sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu} \lambda_\mu k_\nu = 0, \quad (2.)$$

wo also μ und ν alle Werte von 1 bis 3 annehmen.

Eine Wertgruppe von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ oder k_1, k_2, k_3 bestimmt hier-nach nicht wieder eine Wertgruppe der Parameter des anderen Grundgebildes, sondern stellt bloß eine lineare Relation zwischen denselben her. Vermöge derselben können wir nun eines der Verhältnisse der drei Parameter des anderen Grundgebildes aus dessen Gleichung eliminieren und es erübrigt dann eine Gleichung, die zwei Parameter in homogener Weise enthält. Es bestimmt somit ein U -Element des ersten oder V -Element des zweiten Grundgebildes im anderen Grundgebilde nicht wieder resp. ein V - oder U -Element, sondern ein ein-

förmiges Grundgebilde. Auf diese Weise erhalten wir, daß das U -Element mit den Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0$$

im anderen Grundgebilde der zweiten Stufe ein einförmiges Grundgebilde bestimmt, welches die Gerade

$$\frac{\sum_i a_{1i} \lambda_i}{V_1} = \frac{\sum_i a_{2i} \lambda_i}{V_2} = \frac{\sum_i a_{3i} \lambda_i}{V_3}, \quad (3.)$$

wo i alle Werte von 1 bis 3 zu durchlaufen hat, zum Träger besitzt; und daß das V -Element

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 = 0$$

des zweiten Grundgebildes im ersten Grundgebilde der zweiten Stufe ein einförmiges Grundgebilde bestimmt, dessen Träger die Gerade ist:

$$\frac{\sum_i a_{i1} k_i}{U_1} = \frac{\sum_i a_{i2} k_i}{U_2} = \frac{\sum_i a_{i3} k_i}{U_3}. \quad (4.)$$

Die Gerade, welche durch ein U -Element des ersten oder V -Element des zweiten Grundgebildes im anderen Grundgebilde bestimmt wird, wollen wir das dem betreffenden Elemente entsprechende Element der Verwandtschaft nennen, welche durch die Gleichung (2.) zwischen den beiden Grundgebilden hergestellt wurde.

Erst durch die Angabe der Wertgruppen zweier U - oder V -Elemente können wir aus der Verwandtschaftsgleichung die Verhältnisse der Parameter eines Elementes des anderen Grundgebildes berechnen. Es bestimmen also zwei U -Elemente des ersten oder zwei V -Elemente des zweiten Grundgebildes respective ein V - oder U -Element im anderen Grundgebilde. Die beiden U -Elemente des ersten Systems

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0, \quad \lambda'_1 U_1 + \lambda'_2 U_2 + \lambda'_3 U_3 = 0 \quad (5.)$$

bestimmen im zweiten Grundgebilde ein V -Element, dessen Gleichung wir durch Elimination der k_1, k_2, k_3 aus den drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 &= 0 \\ k_1 \sum_i a_{1i} \lambda_i + k_2 \sum_i a_{2i} \lambda_i + k_3 \sum_i a_{3i} \lambda_i &= 0 \\ k_1 \sum_i a_{1i} \lambda'_i + k_2 \sum_i a_{2i} \lambda'_i + k_3 \sum_i a_{3i} \lambda'_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.)$$

erhalten. Wir finden hiernach als Gleichung des gesuchten Elementes

$$\begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ \sum_i a_{1i} \lambda_i & \sum_i a_{2i} \lambda_i & \sum_i a_{3i} \lambda_i \\ \sum_i a_{1i} \lambda'_i & \sum_i a_{2i} \lambda'_i & \sum_i a_{3i} \lambda'_i \end{vmatrix} = 0. \quad (7.)$$

Die beiden V -Elemente des zweiten Grundgebildes:

$k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 = 0$ und $k_1' V_1 + k_2' V_2 + k_3' V_3 = 0$ (8.) bestimmen analog im ersten Grundgebilde ein Element, dessen Gleichung wir durch Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ aus den drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 &= 0 \\ \lambda_1 \sum_i a_{i1} k_i + \lambda_2 \sum_i a_{i2} k_i + \lambda_3 \sum_i a_{i3} k_i &= 0 \\ \lambda_1 \sum_i a_{i1} k'_i + \lambda_2 \sum_i a_{i2} k'_i + \lambda_3 \sum_i a_{i3} k'_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.)$$

erhalten. Wir finden so als Gleichung des gesuchten U -Elementes:

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ \sum_i a_{i1} k_i & \sum_i a_{i2} k_i & \sum_i a_{i3} k_i \\ \sum_i a_{i1} k'_i & \sum_i a_{i2} k'_i & \sum_i a_{i3} k'_i \end{vmatrix} = 0. \quad (10.)$$

Jedem dieser Elemente (7.) und (10.) entspricht, wie sich leicht zeigen läßt, im anderen Grundgebilde die Gerade, welche respective durch die beiden Elemente (5.) und (8.) bestimmt wird. Denn die Gerade, welche durch das Element (6.)

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 = 0$$

bestimmt wird, ist der Träger des einförmigen Grundgebildes, das durch das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 U_1 + \varrho_2 U_2 + \varrho_3 U_3 &= 0 \\ \varrho_1 \sum_i a_{i1} k_i + \varrho_2 \sum_i a_{i2} k_i + \varrho_3 \sum_i a_{i3} k_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.)$$

repräsentiert wird. Daß die beiden Elemente (5.) diesem einförmigen Grundgebilde angehören, ersehen wir sofort, wenn wir der letzten Gleichung in (11.) die Form geben

$$k_1 \sum_i a_{1i} \varrho_i + k_2 \sum_i a_{2i} \varrho_i + k_3 \sum_i a_{3i} \varrho_i = 0.$$

Denn die Wertsysteme

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \lambda_1, & \varrho_2 &= \lambda_2, & \varrho_3 &= \lambda_3 \\ \varrho_1 &= \lambda_1', & \varrho_2 &= \lambda_2', & \varrho_3 &= \lambda_3' \end{aligned}$$

genügen offenbar nach den beiden letzten Gleichungen in (6.) dieser Gleichung, und es entspricht somit dem Elemente (7.) im anderen Grundgebilde der zweiten Stufe die durch die Elemente ~~(6.)~~ bestimmte Gerade. Aus Gleichung (7.) können wir noch eine weitere Folgerung ziehen, wenn wir dieselbe nach den Elementen ihrer letzten Zeile entwickeln:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\mu} a_{1\mu} \lambda'_{\mu} \right) \left(V_2 \sum_i a_{3i} \lambda_i - V_3 \sum_i a_{2i} \lambda_i \right) \\ & - \left(\sum_{\mu} a_{2\mu} \lambda'_{\mu} \right) \left(V_1 \sum_i a_{3i} \lambda_i - V_3 \sum_i a_{1i} \lambda_i \right) \\ & + \left(\sum_{\mu} a_{3\mu} \lambda'_{\mu} \right) \left(V_1 \sum_i a_{2i} \lambda_i - V_2 \sum_i a_{1i} \lambda_i \right) = 0. \end{aligned}$$

Wir ersehen hieraus, daß die Gerade

$$\frac{\sum_i a_{1i} \lambda_i}{V_1} = \frac{\sum_i a_{2i} \lambda_i}{V_2} = \frac{\sum_i a_{3i} \lambda_i}{V_3} \quad (11.)$$

und durch Entwicklung der Determinante in (7.) nach den Elementen der zweiten Zeile, daß die Gerade

$$\frac{\sum_i a_{1i} \lambda'_i}{V_1} = \frac{\sum_i a_{2i} \lambda'_i}{V_2} = \frac{\sum_i a_{3i} \lambda'_i}{V_3} \quad (12.)$$

ein Träger des Elementes (7.) ist. Die Gerade (11.) ist aber das dem Elemente $U_1 \lambda_1 + U_2 \lambda_2 + U_3 \lambda_3 = 0$ und die Gerade (12.) das dem Elemente $U_1 \lambda'_1 + U_2 \lambda'_2 + U_3 \lambda'_3 = 0$ entsprechende Element des anderen Grundgebildes. Das Element (7.) hinwiederum ist das der durch die beiden Elemente (5.) bestimmten Geraden entsprechende Element der Verwandtschaft; da wir dieselben Überlegungen an den Gleichungen (8.), (9.) und (10.) wiederholen lassen, so erhalten wir den Satz:

„Die durch die Gleichung (2.) zwischen den Elementen der beiden Grundgebilde der zweiten Stufe hergestellte Beziehung ist derart, daß jedem U -Elemente des ersten oder V -Elemente des zweiten Grundgebildes im anderen Grundgebilde eine Gerade entspricht, und daß jedem Elemente, welches von derselben getragen wird, eine Gerade entspricht, welche das der ersten Geraden entsprechende Element trägt“.

Offenbar gilt auch die Umkehrung:

Sind die Elemente zweier Grundgebilde der zweiten Stufe

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0 \quad \text{und} \quad k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 = 0$$

einander derart zugewiesen, daß jedem U -Elemente des ersten oder V -Elemente des zweiten Grundgebildes im anderen Grundgebilde eine Gerade entspricht, so sind die Parameter der Grundgebilde durch eine nach denselben lineare Gleichung mit einander verknüpft; denn die Gleichung, welche die Parameter der beiden Grundgebilde verbindet, muß für jede bestimmte Wertgruppe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ eine lineare Relation zwischen k_1, k_2, k_3 und für jede Wertgruppe k_1, k_2, k_3 eine lineare Relation zwischen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ergeben.

2. Zu denselben Ergebnissen gelangen wir durch die folgende Betrachtung, der wir wieder die beiden U -Elemente des ersten Grundgebildes

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda'_1 U_1 + \lambda'_2 U_2 + \lambda'_3 U_3 = 0 \quad (5.)$$

zu Grunde legen wollen. Diese beiden Elemente bestimmen eine Gerade, und jedes U -Element unseres Grundgebildes, das von dieser Geraden getragen wird, muß eine Gleichung von der Form haben

$$(\lambda_1 + \varrho \lambda_1') U_1 + (\lambda_2 + \varrho \lambda_2') U_2 + (\lambda_3 + \varrho \lambda_3') U_3 = 0, \quad (13.)$$

wo ϱ eine bestimmte Constante ist § 38. Diesem Elemente entspricht nun im anderen Grundgebilde die Gerade

$$\frac{\sum_i a_{1i}(\lambda_i + \varrho \lambda_i')}{V_1} = \frac{\sum_i a_{2i}(\lambda_i + \varrho \lambda_i')}{V_2} = \frac{\sum_i a_{3i}(\lambda_i + \varrho \lambda_i')}{V_3},$$

welche wir auch durch die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} V_1 \sum_i a_{2i} \lambda_i - V_2 \sum_i a_{1i} \lambda_i &= \varrho (V_2 \sum_i a_{1i} \lambda_i' - V_1 \sum_i a_{2i} \lambda_i') \\ V_1 \sum_i a_{3i} \lambda_i - V_3 \sum_i a_{1i} \lambda_i &= \varrho (V_3 \sum_i a_{1i} \lambda_i' - V_1 \sum_i a_{3i} \lambda_i') \end{aligned} \right\} \quad (14.)$$

darstellen können. Diese beiden Gleichungen stellen, wenn wir ϱ als Parameter ansehen, zwei projectivische einförmige Grundgebilde dar, die zu dem einförmigen Grundgebilde (13.) projectivisch sind. Es wird also die Gerade, welche einem U -Elemente des einförmigen Grundgebildes (13.) in unserer Verwandtschaft entspricht, bestimmt durch die entsprechenden Elemente in den beiden zu ihm projectivischen einförmigen Grundgebilde (14.). Diese erzeugen aber, wie die Elimination des ϱ lehrt, das einförmige Grundgebilde

$$\begin{aligned} & V_1 \sum_{i, \mu} (a_{2i} a_{3\mu} - a_{2\mu} a_{3i}) (\lambda_i \lambda_\mu' - \lambda_\mu \lambda_i') \\ & - V_2 \sum_{i, \mu} (a_{1i} a_{3\mu} - a_{1\mu} a_{3i}) (\lambda_i \lambda_\mu' - \lambda_\mu \lambda_i') \\ & - V_3 \sum_{i, \mu} (a_{2i} a_{1\mu} - a_{2\mu} a_{1i}) (\lambda_i \lambda_\mu' - \lambda_\mu \lambda_i') = 0, \end{aligned}$$

wo stets $i > \mu$ und i, μ alle Werte von 1 bis 3 durchlaufen. Setzen wir hierin der Kürze halber $(\lambda_i \lambda_\mu' - \lambda_\mu \lambda_i') = L_{i, \mu}$ und hat A_{ik} die frühere Bedeutung, so erhalten wir als Gleichung des einförmigen Grundgebildes

$$\left. \begin{aligned} & V_1 (A_{13} L_{12} + A_{12} L_{13} + A_{11} L_{23}) \\ & + V_2 (A_{23} L_{12} + A_{22} L_{13} + A_{21} L_{23}) \\ & + V_3 (A_{33} L_{12} + A_{32} L_{13} + A_{31} L_{23}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.)$$

Beschreibt demnach ein U -Element die Gerade, welche durch die beiden Elemente (5.) bestimmt wird, so beschreibt seine entsprechende Gerade einen Strahlenbüschel, der von dem Elemente (15.) getragen wird.

Suchen wir nun umgekehrt zu diesem V -Elemente des zweiten Grundgebildes die entsprechende Gerade im ersten Grundgebilde, so finden wir deren Gleichungen, wenn wir in (4.) für

$k_1: A_{13} L_{12} + A_{12} L_{13} + A_{11} L_{23}$, $k_2: A_{23} L_{12} + A_{22} L_{13} + A_{21} L_{23}$
und $k_3: A_{33} L_{12} + A_{32} L_{13} + A_{31} L_{23}$ setzen. Wir erhalten so:

$$\frac{U_1}{L_{23}} = \frac{U_2}{L_{13}} = \frac{U_3}{L_{12}}.$$

hieraus geht aber hervor, daß diese Gerade jedes der beiden Elemente (5.) trägt, da sie identisch ist mit der Geraden, welche von demselben bestimmt wird, wie die Berechnung der Verhältnisse $U_1 : U_2 : U_3$ aus (5.) lehrt. Dies ist aber der Inhalt des obigen Satzes, dem wir wegen der eindeutigen Beziehung, welche zwischen den Elementen der beiden Grundgebilde der zweiten Stufe hergestellt wurde, auch die folgende Fassung geben können:

Beschreibt ein U -Element des ersten oder ein V -Element des zweiten Grundgebildes ein einförmiges Grundgebilde, so beschreibt die entsprechende Gerade im anderen Grundgebilde ein zu diesem projectivisches einförmiges Grundgebilde.“

3) Die Verwandtschaftsgleichung enthält in homogener Weise neun Constante und ist somit gegeben, sobald die Verhältnisse von acht derselben zur neunten bekannt sind. Eine Gerade nun, z. B. des ersten Grundgebildes wird durch ein Gleichungssystem von der Form

$$\frac{U_1}{A_1} = \frac{U_2}{A_2} = \frac{U_3}{A_3}$$

repräsentiert, und soll sie daher dem Elemente des zweiten Grundgebildes entsprechen, das durch die Parameter k_1, k_2, k_3 bestimmt wird, so muß demnach sein

$$A_1 : A_2 : A_3 = \Sigma a_{i1} k_i : \Sigma a_{i2} k_i : \Sigma a_{i3} k_i,$$

wodurch zwei lineare homogene Relationen zwischen den neun Constanten a hergestellt werden. Es liefert also jedes Paar entsprechender Elemente unserer Verwandtschaft zwei lineare homogene Relationen zwischen den neun Constanten der Verwandtschaftsgleichung. Dieselben sind also bestimmt, sobald vier Paare entsprechender Elemente der Verwandtschaft gegeben sind.

§. 62.

1) Sind die Parameter der beiden Grundgebilde der zweiten Stufe

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0 \quad \text{und} \quad k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 = 0$$

durch zwei lineare Gleichungen^{*} mit einander verknüpft, so werden durch dieselben allerdings die U -Elemente des ersten und die V -Elemente des zweiten Grundgebildes einander eindeutig zugeordnet, aber im Allgemeinen werden hierdurch noch nicht den U -Elementen des ersten oder V -Elementen des zweiten Grundgebildes, welche von einer Geraden getragen werden, respective V - oder U -Elemente des anderen Grundgebildes zugewiesen, die ebenfalls eine Gerade zum Träger besitzen. Denn wie unmittelbar ersichtlich ist, genügen die Parameter aller U -Elemente des ersten oder V -Elemente des zweiten Grundgebildes, die von einer Geraden getragen werden, einer be-

* da $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 61

stimmten linearen Relation, und umgekehrt, alle U -Elemente des ersten oder V -Elemente des zweiten Grundgebildes, deren Parameter eine lineare Relation befriedigen, bestimmen eine Gerade. Sind nämlich etwa

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_1' U_1 + \lambda_2' U_2 + \lambda_3' U_3 = 0$$

zwei U -Elemente des ersten Grundgebildes, so wird die Gleichung jedes U -Elementes der Geraden, die durch diese beiden Elemente bestimmt ist,

$$\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3 = 0,$$

sich vermöge zweier Constante μ und μ' auf die Form bringen lassen:

$$(\mu \lambda_1 + \mu' \lambda_1') U_1 + (\mu \lambda_2 + \mu' \lambda_2') U_2 + (\mu \lambda_3 + \mu' \lambda_3') U_3 = 0.$$

Es muß daher

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = (\mu \lambda_1 + \mu' \lambda_1') : (\mu \lambda_2 + \mu' \lambda_2') : (\mu \lambda_3 + \mu' \lambda_3'),$$

woraus sich zwischen α_1 , α_2 und α_3 die lineare Relation ergibt ^{*) lim. μ, μ'}

$$\alpha_1 (\lambda_2 \lambda_3' - \lambda_3 \lambda_2') + \alpha_2 (\lambda_3 \lambda_1' - \lambda_1 \lambda_3') + \alpha_3 (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1') = 0.$$

Umgekehrt liegen die U -Elemente, deren Parameter der linearen Relation

$$\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3 = 0$$

genügen, in der Geraden

$$\frac{U_1}{\alpha_1} = \frac{U_2}{\alpha_2} = \frac{U_3}{\alpha_3}.$$

Sollen daher den U -Elementen des ersten oder V -Elementen des zweiten Grundgebildes, die von einer Geraden getragen werden, respective V -Elemente des zweiten oder U -Elemente des ersten Grundgebildes zugeordnet werden, welche wieder in einer Geraden liegen, so muß jede lineare Verbindung zwischen den Parametern des einen Grundgebildes — vermöge der beiden Relationen, welche die Parameter der beiden Grundgebilde mit einander verknüpfen, — wieder eine lineare Verbindung zwischen den Parametern des anderen Grundgebildes nach sich ziehen. Ist also $\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 = 0$ eine derartige lineare Verbindung zwischen den Parametern des einen Grundgebildes, so müssen die Ausdrücke für $\frac{k_1}{k_3}$ und $\frac{k_2}{k_3}$, welche sich aus den beiden Relationen zwischen den Parametern der beiden Systeme ergeben, diese Verbindung wieder in eine nach λ_1 , λ_2 , λ_3 lineare überführen. Dies ist aber offenbar nur möglich, wenn Zähler und Nenner jedes dieser Ausdrücke nach λ_1 , λ_2 , λ_3 bloß linear ist und überdies die Nenner gleich sind. Also haben diese beiden Relationen — die Verwandtschaftsgleichungen — die Form

$$\frac{k_1}{k_3} = \frac{a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3}{a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3};$$

$$\frac{k_2}{k_3} = \frac{a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{23}\lambda_3}{a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3}.$$

Mittelst eines Proportionalitätsfactors ϱ können wir dieselben durch die drei Gleichungen ersetzen

$$\left. \begin{aligned} \varrho k_1 &= a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3 \\ \varrho k_2 &= a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{23}\lambda_3 \\ \varrho k_3 &= a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3 \end{aligned} \right\}. \quad (1.)$$

Aus den obigen Gleichungen ergibt sich, wenn mit A_{ik} die Subdeterminante des Elementes a_{ik} der Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}$ bezeichnet wird,

$$\left. \begin{aligned} \sigma \lambda_1 &= A_{11}k_1 + A_{21}k_2 + A_{31}k_3 \\ \sigma \lambda_2 &= A_{12}k_1 + A_{22}k_2 + A_{32}k_3 \\ \sigma \lambda_3 &= A_{13}k_1 + A_{23}k_2 + A_{33}k_3 \end{aligned} \right\}. \quad (2.)$$

S.σ = A

Dem Elemente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des ersten Grundgebildes entspricht also im zweiten Grundgebilde das Element

$$\left. \begin{aligned} (a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3) V_1 \\ + (a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{23}\lambda_3) V_2 \\ + (a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3) V_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.)$$

und dem Elemente k_1, k_2, k_3 des zweiten Grundgebildes ist das Element

$$\left. \begin{aligned} (A_{11}k_1 + A_{21}k_2 + A_{31}k_3) U_1 \\ + (A_{12}k_1 + A_{22}k_1 + A_{33}k_3) U_2 \\ + (A_{13}k_1 + A_{23}k_2 + A_{33}k_3) U_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.)$$

im ersten Grundgebilde zugewiesen.

Alle U -Elemente des ersten Grundgebildes, deren Parameter einer linearen Relation

$$\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3 = 0 \quad (5.)$$

genügen, werden von der Geraden

$$\frac{U_1}{\alpha_1} = \frac{U_2}{\alpha_2} = \frac{U_3}{\alpha_3}$$

getragen. Die entsprechenden V -Elemente des zweiten Grundgebildes werden aus der Gleichung

$$\lambda_1 \sum_i a_{i1} V_i + \lambda_2 \sum_i a_{i2} V_i + \lambda_3 \sum_i a_{i3} V_i = 0$$

durch Substitution der jeweiligen Werte für λ_1, λ_2 und λ_3 erhalten. Da aber λ_1, λ_2 und λ_3 der Gleichung (5.) genügen müssen, so liegen alle diese V -Elemente in der Geraden, deren Gleichungen sind:

$$\frac{\sum_i a_{i1} V_i}{\alpha_1} = \frac{\sum_i a_{i2} V_i}{\alpha_2} = \frac{\sum_i a_{i3} V_i}{\alpha_3} \rightarrow$$

oder

$$\frac{V_1}{\sum_i A_{1i} \alpha_i} = \frac{V_2}{\sum_i A_{2i} \alpha_i} = \frac{V_3}{\sum_i A_{3i} \alpha_i}.$$

In derselben Weise finden wir, daß den V -Elementen der Geraden des zweiten Grundgebildes, welche durch die lineare Relation

$$\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3 = 0$$

zwischen dessen Parametern bestimmt wird, im ersten Grundgebilde U -Elemente zugewiesen sind, welche von der Geraden

$$\frac{\sum_i A_{1i} V_i}{\beta_1} = \frac{\sum_i A_{2i} V_i}{\beta_2} = \frac{\sum_i A_{3i} V_i}{\beta_3}$$

getragen werden. Also:

„Den U -Elementen des ersten oder V -Elementen des zweiten Grundgebildes, welche von einer Geraden getragen werden, entsprechen im anderen Grundgebilde bezüglich V - oder U -Elemente, welche ebenfalls eine Gerade zum Träger besitzen. Zwei einander derartig zugeordnete Gerade der beiden Grundgebilde sollen einander entsprechende Gerade genannt werden.“

Zu demselben Ergebnisse gelangen wir auch in folgender Weise, wobei wir von zwei U -Elementen des ersten Grundgebildes, deren Parameter bezüglich $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ seien, ausgehen wollen. Bezeichnen wir der Kürze halber ihre Gleichungen mit $P = 0$ und $Q = 0$ und die Gleichungen der entsprechenden V -Elemente bezüglich mit $P' = 0$ und $Q' = 0$, so entspricht dem U -Elemente

$$P + \mu Q = 0$$

das V -Element $P' + \mu Q' = 0$. Denn das U -Element $P + \mu Q = 0$ besitzt die Parameter $\lambda_1 + \mu \lambda'_1; \lambda_2 + \mu \lambda'_2; \lambda_3 + \mu \lambda'_3$, deren Substitution in (3) als Gleichung des entsprechenden V -Elementes

$$P' + \mu Q' = 0$$

ergiebt. Somit wird das V -Element, welches einem U -Elemente entspricht, das von der Geraden getragen wird, die durch die beiden U -Elemente P und Q bestimmt wird, von der Geraden getragen, welche durch die entsprechenden V -Elemente P' und Q' getragen wird.

„Die durch die beiden Gleichungen (1) hergestellte Beziehung zwischen den Elementen der beiden Grundgebilde ist also eine eindeutige: Jedem U -Elemente des ersten oder V -Elemente des zweiten Grundgebildes entspricht im anderen bezüglich ein V - oder U -Element, jeder Geraden des einen entspricht eine Gerade des anderen Grundgebildes, und zwar derart, daß jedem Elemente, welches von der einen Geraden getragen wird, im anderen Grundgebilde ein Element entspricht, welches von der entsprechenden Geraden getragen wird.“

2) Aus der eindeutigen Beziehung, welche zwischen den Elementen der beiden Grundgebilde hergestellt wurde, folgt noch:

„Beschreibt ein Element des einen Grundgebildes ein einförmiges Grundgebilde, so beschreibt sein entsprechendes Element im anderen Grundgebilde ein zu diesem projectivisches einförmiges Grundgebilde.“

Es ergibt sich auch leicht die Umkehrung des obigen Satzes:

„Sind die Elemente zweier Grundgebilde der zweiten Stufe einander eindeutig zugeordnet, so müssen deren Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und k_1, k_2, k_3 durch Gleichungen von der Form (1.) mit einander verknüpft sein.“

Es seien

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0 \quad \text{und} \quad k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 = 0$$

die Gleichungen der beiden Grundgebilde. Da die Beziehung zwischen den U - und V -Elementen eine eindeutige sein soll, so müssen die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und k_1, k_2, k_3 durch zwei lineare Gleichungen mit einander verknüpft sein. Da aber jeder Geraden des einen eine Gerade des anderen Grundgebildes entsprechen soll, so müssen dieselben jede lineare Relation zwischen den Parametern des einen wieder in eine lineare Relation zwischen den Parametern des anderen Grundgebildes überführen. Die Gleichungen müssen somit nach den Bemerkungen Eingangs dieses Paragraphen die Form (1.) besitzen.

3) Die drei Verwandtschaftsgleichungen sind von den Verhältnissen von acht ihrer Constanten zur neunten abhängig und sind daher mit diesen acht Verhältnissen gegeben. Nun liefern aber die Parameter jedes Paares entsprechender U - und V -Elemente zwei lineare Gleichungen zwischen diesen Constanten und desgleichen jedes Paar entsprechender Geraden. Denn ist z. B. einer Geraden des ersten Grundgebildes

$$\frac{U_1}{\alpha_1} = \frac{U_2}{\alpha_2} = \frac{U_3}{\alpha_3}$$

die Gerade

$$\frac{V_1}{\beta_1} = \frac{V_2}{\beta_2} = \frac{V_3}{\beta_3}$$

im zweiten Grundgebilde als entsprechende zugewiesen, so ist

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = \sum_i A_{1i} \alpha_i : \sum_i A_{2i} \alpha_i : \sum_i A_{3i} \alpha_i.$$

Da also jedes Paar entsprechender Elemente der beiden Grundgebilde zwei lineare Relationen zwischen den Constanten der Verwandtschaftsgleichungen herstellt, so ist die ganze Beziehung zwischen den beiden Grundgebilden gegeben, sobald wir zu vier unabhängigen Elementen des einen die entsprechenden Elemente des anderen Grundgebildes kennen.

§ 63.

In den beiden vorhergehenden Paragraphen haben wir erkannt, daß wir auf zwei Arten eine eindeutige Beziehung zwischen den Elementen zweier Grundgebilde der zweiten Stufe herstellen können. Bei der einen wurden die Parameter der beiden Grundgebilde durch eine nach ihnen lineare Relation mit einander verknüpft, bei der anderen wurden die Verhältnisse der drei Parameter des einen den Verhältnissen dreier linearer homogener Ausdrücke aus den Parametern des anderen Grundgebildes gleichgesetzt. Geometrisch unterschieden sich diese beiden Arten der eindeutigen Verwandtschaft dadurch, daß bei der zweiten Art einer Geraden des einen Grundgebildes wieder eine Gerade im anderen Grundgebilde zugewiesen ist, während bei der ersten Art dies nicht der Fall ist.

In der Geometrie wird jedoch die Einteilung dieser eindeutigen linearen Verwandtschaft zwischen Grundgebilden der zweiten Stufe aus einem anderen Gesichtspunkte vorgenommen, wonach unterschieden wird, ob die beiden Grundgebilde der zweiten Stufe, zwischen deren Elementen eine eindeutige Beziehung hergestellt werden soll, gleichartig — also zwei Strahlenbündel oder zwei ebene Systeme, — oder ungleichartig — ein Strahlenbündel und ein ebenes System — sind. Ist die eindeutige Beziehung zwischen den Elementen zweier gleichartiger Grundgebilde von der Art, daß einer Geraden des einen eine Gerade des anderen Grundgebildes entspricht, so werden sie *collinear*, anderen Falls *reciprok* zu einander genannt; ist hingegen diese Beziehung zwischen den Elementen zweier ungleichartiger Grundgebilde von der Beschaffenheit, daß einer Geraden des einen wieder eine Gerade des anderen Grundgebildes entspricht, so werden sie *reciprok* und andernfalls *collinear* genannt. Die *Collineation* zweier gleichartiger Grundgebilde der zweiten Stufe wird somit definiert durch ein System zweier derartiger linearer homogener Gleichungen zwischen den Parametern der beiden Grundgebilde, daß aus denselben das Verhältnis der drei Parameter des einen Grundgebildes sich durch das Verhältnis dreier nach den Parametern des anderen Grundgebildes linearer homogener Ausdrücke darstellen läßt; die *Collineation* zweier ungleichartiger Grundgebilde wird durch eine nach den Parametern der beiden Grundgebilde lineare und homogene Gleichung ausgedrückt. Die *Reciprocität* zweier gleichartiger Grundgebilde der zweiten Stufe wird hergestellt durch eine nach den Parametern der beiden Grundgebilde lineare homogene Gleichung; die zweier ungleichartiger Grundgebilde durch zwei nach ihren Parametern lineare und homogene Gleichungen von der früher angegebenen Beschaffenheit.

Es sind demnach reciprok:

1) Zwei Strahlenbündel S und S' , wenn jedem Strahle g von S eine Ebene E' von S' entspricht und jeder durch g gehenden Ebene E von S ein in E' liegender Strahl g' von S' .

2) Zwei ebene Systeme Σ und Σ' wenn jedem Punkte P von Σ eine Gerade g' von Σ' und jeder durch P gehenden Geraden g von Σ ein in g' liegender Punkt P' von Σ' entspricht.

3) Ein Strahlenbündel S und ein ebenes System Σ , wenn jedem Strahl g von S eine Gerade γ von Σ und jeder durch g gehenden Ebene E von S ein in γ liegender Punkt von Σ entspricht.

Collinear sind

1) Zwei Strahlenbündel S und S' , wenn jedem Strahle g von S wieder ein Strahl g' von S' und jeder durch g gehenden Ebene E von S eine durch g' gehende Ebene E' von S' entspricht.

2) Zwei ebene Systeme Σ und Σ' , wenn jedem Punkte P von Σ wieder ein Punkt P' von Σ' und jeder durch P gehenden Geraden g von Σ eine durch P' gehende Gerade g' von Σ' entspricht.

3) Ein Strahlenbündel S und ein ebenes System Σ' , wenn jedem Strahle g von S ein Punkt P' , und jeder durch g gehenden Ebene E von S eine durch P' gehende Gerade e' entspricht.

Wir wollen aus den beiden vorhergehenden Paragraphen noch einige wichtige Sätze über collineare und reciproke Grundgebilde der zweiten Stufe wiederholen. Es wurde sowohl von der in § 61 als auch in § 63 aufgestellten Verwandtschaft bewiesen, daß den Elementen eines einförmigen Grundgebildes des einen Grundgebildes der zweiten Stufe die Elemente eines zu diesen projectivischen einförmigen Grundgebildes im anderen Grundgebilde der zweiten Stufe entsprechen. Somit:

Beschreibt ein Element eines Grundgebildes der zweiten Stufe ein einförmiges Grundgebilde, so beschreibt sein entsprechendes Element im reciproken oder collinearen Grundgebilde der zweiten Stufe ein projectivisches einförmiges Grundgebilde.

Jede der beiden Arten eindeutiger Beziehung § 61 und 62 zwischen den Elementen zweier Grundgebilde der zweiten Stufe erwies sich als gegeben durch vier Paare entsprechender Elemente der beiden Grundgebilde, wenn keine drei Elemente desselben Grundgebildes der zweiten Stufe demselben einförmigen Grundgebilde angehören.

Daraus folgt: Sollen die Elemente zweier Grundgebilde der zweiten Stufe eindeutig aufeinander bezogen werden, so können vier gleichartigen Elementen A, B, C, D des einen, von denen keine drei demselben einförmigen Grund-

gebilde angehören, willkürlich vier solche Elemente A' , B' , C' , D' des anderen Grundgebildes als resp. entsprechenden zugewiesen werden, wodurch dann jedem Elemente des einen ein bestimmtes Element des anderen Grundgebildes zugeordnet ist.

Um also zwei Strahlenbündel reciprok auf einander zu beziehen, können wir irgend vier Strahlen des einen, von denen keine drei in derselben Ebene liegen, vier Ebenen des anderen Bündels, von denen keine drei in derselben Geraden sich schneiden, resp. als entsprechende zuweisen; um die beiden Bündel collinear auf einander zu beziehen, können wir irgend vier Strahlen oder Ebenen des einen, von denen keine drei demselben resp. Strahlen- oder Ebenenbüschel angehören, willkürlich vier resp. Ebenen oder Strahlen des anderen Bündels, von denen keine drei demselben einförmigen Grundgebilde angehören, als entsprechende zuordnen.

Um zwei ebene Systeme reciprok auf einander zu beziehen, können wir irgend vier Punkten des einen, von denen keine drei in einer Geraden liegen, vier Gerade des anderen Systems, von denen keine drei sich in demselben Punkte schneiden, willkürlich als entsprechende zuweisen; um dieselben collinear auf einander zu beziehen, können wir irgend vier Punkten oder Geraden des einen, von denen keine drei einem einförmigen Grundgebilde angehören, vier solche resp. Gerade oder Punkte des anderen Systems als entsprechende willkürlich zuweisen.

Um einen Strahlenbündel und ein ebenes System reciprok auf einander zu beziehen, können wir irgend vier Strahlen oder Ebenen des Bündels, von denen keine drei einem einförmigen Grundgebilde angehören, vier solche resp. Gerade oder Punkte des ebenen Systems willkürlich als entsprechende zuordnen; um sie collinear auf einander zu beziehen, können wir irgend vier Strahlen oder Ebenen des Bündels, von denen keine drei einem einförmigen Grundgebilde angehören, vier solche resp. Punkte oder Geraden des ebenen Systems als entsprechende willkürlich zuweisen.

Aus dem Begriffe zweier reciproken und collinearen Grundgebilde der zweiten Stufe ergeben sich einige wichtigere Folgerungen:

Sind zwei Grundgebilde der zweiten Stufe zu demselben dritten reciprok, so sind sie unter einander collinear.

Die beiden Grundgebilde der zweiten Stufe A und B seien zu demselben dritten C reciprok. Dann sind die Elemente von A und B einander eindeutig zugewiesen in Ansehung der Elemente, welche demselben Elemente von C entsprechen. Sind nun A und B zwei

gleichartige Grundgebilde der zweiten Stufe — zwei Strahlenbündel oder zwei ebene Systeme — so wird durch C jedem Elemente von A ein gleichartiges Element von B , und wenn sie ungleichartig — ein Strahlenbündel und ebenes System — sind, wird einer Geraden von A nicht wieder eine Gerade von B zugewiesen.

Ist ein Grundgebilde der zweiten Stufe zu einem zweiten reciprok und zu einem dritten collinear, so sind die letzteren zu einander reciprok.

Es sei B reciprok zu A und collinear zu C . Vermöge B sind dann die Elemente von A und C einander eindeutig zugewiesen. Sind nun A und C gleichartige Grundgebilde, so ist durch jede Gerade von B jeder Geraden von C ein ungleichartiges Element von A zugeordnet; und sind sie ungleichartig, so ist durch B jeder Geraden von C wieder eine Gerade von A zugewiesen. Somit sind A und C zu einander reciprok.

Sind zwei Grundgebilde der zweiten Stufe zu demselben dritten collinear, so sind sie untereinander collinear.

Denn durch dieses dritte Grundgebilde C sind die Elemente von A und B , welche demselben Elemente von C entsprechen, einander zugewiesen und somit hierdurch A und B eindeutig auf einander bezogen. Sind nun A und B gleichartige Grundgebilde, so wird durch C jeder Geraden des einen wieder eine Gerade des anderen, und sind sie ungleichartige Grundgebilde jeder Geraden des einen ein ungleichartiges Element des anderen Grundgebildes zugewiesen.

Hieraus folgt wieder: Ist in einer Reihe von Grundgebilden der zweiten Stufe jedes zu seinem nachfolgenden collinear, so sind alle untereinander collinear.

So sind also die Schnitte verschiedener Ebenen mit demselben Strahlenbündel und die Strahlenbündel, welche dasselbe ebene System projicieren, zu diesem und daher untereinander collinear.

Zehntes Capitel.

Die Erzeugnisse projectivischer Grundgebilde der zweiten Stufe.

§ 64.

Die Erzeugnisse reciproker Grundgebilde der zweiten Stufe.

Sind die beiden Grundgebilde der zweiten Stufe

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0 \quad \text{und} \quad k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 = 0 \quad (1.)$$

gleichartig und reciprok, so sind die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und k_1, k_2, k_3 durch eine lineare Gleichung

$$\sum a_{\mu\nu} \lambda_\mu k_\nu = 0 \quad (2.)$$

mit einander verknüpft. Dem Elemente des ersten Grundgebildes

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0 \quad (3.)$$

entspricht § 61 dann im anderen Grundgebilde die Gerade

$$\frac{V_1}{\sum a_{1\nu} \lambda_\nu} = \frac{V_2}{\sum a_{2\nu} \lambda_\nu} = \frac{V_3}{\sum a_{3\nu} \lambda_\nu} \quad (4.)$$

und dem Elemente des zweiten Grundgebildes

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 = 0 \quad (5.)$$

im ersten Grundgebilde die Gerade

$$\frac{U_1}{\sum a_{\mu 1} k_\mu} = \frac{U_2}{\sum a_{\mu 2} k_\mu} = \frac{U_3}{\sum a_{\mu 3} k_\mu} \quad (6.)$$

Der Geraden des ersten Grundgebildes

$$\frac{U_1}{\alpha_1} = \frac{U_2}{\alpha_2} = \frac{U_3}{\alpha_3}, \quad (7.)$$

auf welche Form sich die Gleichungen einer jeden Geraden des ersten Grundgebildes bringen lassen, entspricht im anderen Grundgebilde das Element

$$V_1 \sum_i \alpha_i A_{1i} + V_2 \sum_i \alpha_i A_{2i} + V_3 \sum_i \alpha_i A_{3i} = 0 \quad (8.)$$

und der Geraden des zweiten Grundgebildes

$$\frac{V_1}{\beta_1} = \frac{V_2}{\beta_2} = \frac{V_3}{\beta_3} \quad (9.)$$

entspricht im ersten Grundgebilde das Element

$$U_1 \sum_i \beta_i A_{i1} + U_2 \sum_i \beta_i A_{i2} + U_3 \sum_i \beta_i A_{i3} = 0, \quad (10.)$$

wo A_{ik} die Subdeterminante des Elementes a_{ik} in $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}$ bezeichnet.

Wir wollen nun auch die beiden einander reciprok gegenüberstehenden Fälle getrennt betrachten, in welchen die beiden gleichartigen

Grundgebilde zwei Strahlenbündel oder zwei ebene Systeme sind, in welchen also die beiden Gleichungen der Grundgebilde aus Punct- oder Ebenencoordinaten gebildet sind.

Sind sie zwei Strahlenbündel, so genügen die Coordinaten des Durchschnittspunctes der Ebene des ersten Bündels, welche durch die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bestimmt wird, mit der entsprechenden Geraden im zweiten Bündel den vier Gleichungen

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0$$

$$\sum_v \alpha_{1v} \lambda_v = \varrho V_1; \quad \sum_v \alpha_{2v} \lambda_v = \varrho V_2; \quad \sum_v \alpha_{3v} \lambda_v = \varrho V_3.$$

Diese vier Gleichungen können aber nur unter den Bedingungen bestehen, daß die Determinante der Coefficienten von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und ϱ verschwindet, daß also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & V_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & V_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & V_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (11.)$$

Es genügen somit die Coordinaten des Durchschnittspunctes jeder Ebene des ersten mit ihrer entsprechenden Geraden des zweiten Bündels dieser Gleichung.

Durch genau dieselben Betrachtungen überzeugen wir uns, daß auch die Coordinaten des Durchschnittspunctes jeder Ebene des zweiten mit ihrer entsprechenden Geraden des ersten Bündels diese Gleichung befriedigen.

Die Entwicklung dieser Determinante nach den Elementen der letzten Zeile und letzten Colonne, oder auch die Elimination der $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ oder $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ resp. aus den Gleichungen (7.) und (8.) oder (9.) und (10.) ergibt für die Gleichung (11.)

$$\sum_{ik} A_{ik} V_i U_k = 0,$$

wo die Summe alle Werte der i und k von 1 bis 3 umfaßt.

Die Gleichung (11.) ist nach den Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 des Durchschnittspunctes irgend einer Ebene des einen mit der entsprechenden Geraden des anderen Strahlenbündels von zweitem Gerade, und wir wollen deshalb den durch sie dargestellten geometrischen Ort eine Fläche zweiter Ordnung nennen.

Wir haben somit: Die Durchschnittspuncte der entsprechenden Elemente zweier reciproken Strahlenbündel erzeugen eine Fläche zweiter Ordnung.

Dieselbe geht offenbar durch die Mittelpuncte der beiden Bündel, da für die Coordinaten des einen $U_1 = U_2 = U_3 = 0$, für die des

anderen $V_0 = V_1 = V_2 = 0$ wird, also die Determinante (11.) verschwindet. Jede Gerade schneidet diese Fläche im Allgemeinen in zwei Punkten, wovon wir uns am einfachsten überzeugen, indem wir dieselbe zu einer Kante des Fundamentaltetraeders machen. Um die Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte mit der Fläche zu finden, müssen wir dann in der Gleichung der Fläche zwei der Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 gleich Null setzen, wodurch zur Bestimmung des Verhältnisses der beiden anderen Coordinaten eine quadratische Gleichung sich ergibt.

Von jeder Ebene wird die Fläche im Allgemeinen in einem Kegelschnitte geschnitten, wovon wir uns wieder am einfachsten überzeugen, indem wir sie zu einer Ebene des Fundamentaltetraeders machen. Wir erhalten nämlich die Gleichung des Schnittes der Fläche mit einer Seitenebene des Tetraeders, indem wir in der Gleichung der Fläche eine der Coordinaten gleich Null setzen (§ 37).

2) Die allgemeinste Form einer Gleichung zweiten Grades, und somit einer Fläche zweiter Ordnung zwischen den Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 ist offenbar:

$$x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4) \\ + x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4) + x_4(a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4) = 0,$$

worin $a_{ik} = a_{ki}$ ist. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß jede derartige Fläche durch zwei reciproke Bündel erzeugt werden kann. Verlegen wir zunächst eine der Ecken des Fundamentaltetraeders, etwa $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ in einen Punct der Fläche. Dann muß der Gleichung derselben durch das Wertsystem $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ genügt werden, was nur möglich ist, wenn $a_{44} = 0$ ist. Bezogen auf ein Fundamentaltetraeder, dessen eine Ecke in der Fläche liegt, hat also die Gleichung der Fläche die Form:

$$x_1(a_{11}'x_1 + a_{12}'x_2 + a_{13}'x_3 + 2a_{14}'x_4) + x_2(a_{21}'x_1 + a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 + 2a_{24}'x_4) \\ + x_3(a_{31}'x_1 + a_{32}'x_2 + a_{33}'x_3 + 2a_{34}'x_4) = 0.$$

Durch Vergleichung mit (12.) finden wir, daß dieselbe aus $\sum_{ik} A_{ik} V_i U_k = 0$ hervorgeht, indem $A_{ii} = 1, A_{ik} = 0; U_1 = x_1, U_2 = x_2, U_3 = x_3$, ferner

$$a_{11}'x_1 + a_{12}'x_2 + a_{13}'x_3 + 2a_{14}'x_4 = V_1$$

$$a_{21}'x_1 + a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 + 2a_{24}'x_4 = V_2$$

$$a_{31}'x_1 + a_{32}'x_2 + a_{33}'x_3 + 2a_{34}'x_4 = V_3$$

angenommen wird. In Form einer Determinante geschrieben ist die Gleichung dieser Fläche:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & V_1 \\ 0 & 1 & 0 & V_2 \\ 0 & 0 & 1 & V_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Vergleichung dieser Determinante mit (11.) zeigt nun unmittelbar, daß diese Fläche das Erzeugnis der beiden Bündel

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0, \quad k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 = 0,$$

wenn dieselben durch die Gleichung

$$\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3 = 0$$

reciprok auf einander bezogen werden.

Wir haben somit den Satz:

Jede Fläche zweiten Grades wird durch zwei reciproke Strahlenbündel, deren Mittelpunkte in ihr liegen, erzeugt, indem jeder Strahl des einen von der ihm entsprechenden Ebene des anderen Bündels in einem Punkte der Fläche geschnitten wird.

§ 65.

Involutorische Strahlenbündel.

Den bisherigen Auseinandersetzungen lag offenbar die stillschweigende Voraussetzung zu Grunde, daß die beiden Bündel nicht concentrisch liegen, denn nur in diesem Falle wird jede Ebene des einen von ihrer entsprechenden Ebene des anderen Bündels im Allgemeinen in einem vom Mittelpunkte des Bündels verschiedenen Punkte geschnitten. Wir wollen nunmehr die geometrische Bedeutung der Gleichung (11.) für den Fall erörtern, daß die beiden Bündel concentrisch sind. Da nunmehr die Ebenen V_1, V_2, V_3 durch den Durchschnittspunkt der drei Ebenen U_1, U_2 und U_3 gehen, so lassen sich stets Constante m auffinden, dergestalt, daß (§ 11)

$$\begin{aligned} V_1 &\equiv m_{11} U_1 + m_{12} U_2 + m_{13} U_3 \\ V_2 &\equiv m_{21} U_1 + m_{22} U_2 + m_{23} U_3 \\ V_3 &\equiv m_{31} U_1 + m_{32} U_2 + m_{33} U_3. \end{aligned}$$

Die Gleichung des Bündels

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 \equiv 0$$

geht hiernach über in

$$\begin{aligned} U_1 \sum_i m_{i1} k_i + U_2 \sum_i m_{i2} k_i + U_3 \sum_i m_{i3} k_i &= 0 \\ &\equiv x_1 U_1 + x_2 U_2 + x_3 U_3, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \sum_i m_{i1} k_i; & \kappa_2 &= \sum_i m_{i2} k_i; \\ \kappa_3 &= \sum_i m_{i3} k_i. \end{aligned}$$

Berechnen wir aus diesen Gleichungen k_1, k_2, k_3 und substituieren deren Werte in § 64 (2.), so erhalten wir die Verwandtschaftsgleichung, welche die beiden Grundgebilde für $U_1 = 0, U_2 = 0, U_3 = 0$ als Grundelemente reciprok auf einander bezieht.

Nachdem wir nun die beiden reciproken Grundgebilde von irgend welchem Tripel von Elementen auf jedes andere Tripel als Grundelemente beziehen gelernt haben, wollen wir voraussetzen, daß für $U_1 = 0, U_2 = 0, U_3 = 0$ als Grundelemente die beiden Grundgebilde der zweiten Stufe:

$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0$ und $k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 = 0$
durch die Gleichung

$$\sum_{\mu \nu} a_{\mu \nu} \lambda_{\mu} k_{\nu} = 0$$

reciprok auf einander bezogen seien.

Schneidet im Falle, daß beide reciproke Strahlenbündel concentrisch sind, eine Gerade ihre entsprechende Ebene außer im Mittelpunkte des Strahlenbündels noch in einem weiteren Punkte, so erhalten wir die Coordinaten dieses Durchschnittspunktes einer Ebene des ersten Bündels mit einer Geraden des zweiten durch Bestimmung der Verhältnisse von x_1, x_2, x_3, x_4 aus den vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 &= 0; \\ \sum_i a_{1i} \lambda_i - \varrho U_1 &= 0; \\ \sum_i a_{2i} \lambda_i - \varrho U_2 &= 0; \\ \sum_i a_{3i} \lambda_i - \varrho U_3 &= 0. \end{aligned}$$

Berechnen wir aus den drei letzten dieser Gleichungen $\varrho U_1, \varrho U_2, \varrho U_3$, so ergibt die Substitution dieser Werte in die erste Gleichung die Bedingung, welcher die $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ genügen müssen, damit diese vier Gleichungen durch dieselben drei Werte von U_1, U_2 und U_3 befriedigt werden können. Jede Ebene des Bündels also, deren Parameter λ_1, λ_2 und λ_3 dieser nach $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ quadratischen Bedingungsgleichung genügen, wird somit von ihrer entsprechenden Geraden außer im Mittelpunkte des Bündels noch in einem weiteren Punkte geschnitten, enthält also dieselbe. Wir erkennen somit, daß in den beiden concentrischen Bündeln unendlich viele Gerade vorkommen, deren jede in ihre entsprechende Ebene fällt. Die Coordinaten eines jeden Punktes einer solchen Geraden genügen nun der Gleichung (11.)

und es stellt daher dieselbe in unserem Falle einen Kegel dar. Denn die Fläche erscheint für jede Ebene, durch welche wir sie schneiden, als der Schein eines Kegelschnittes, da sie im Allgemeinen von einer Ebene in einem Kegelschnitte geschnitten wird, S. 193. Die Ebenen der Bündel, die durch ihre entsprechenden Geraden gehen, bilden, wie sich leicht zeigen läßt, einen Ebenenbüschel der zweiten Ordnung, der aber im Allgemeinen einen anderen als den von den Geraden gebildeten Kegel umhüllt.

Wir können nämlich jede Ebene des Strahlenbündels sowohl als eine Ebene des ersten als auch des zweiten Bündels betrachten, und im Allgemeinen wird jedes Mal der Ebene ein anderer Strahl des Bündels entsprechen. Denn der Ebene

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0, \quad (1.)$$

aufgefaßt als Ebene des ersten Bündels, entspricht die Gerade

$$\frac{U_1}{\sum_v a_{1v} \lambda_v} = \frac{U_2}{\sum_v a_{2v} \lambda_v} = \frac{U_3}{\sum_v a_{3v} \lambda_v} \quad (2.)$$

und als Ebene des zweiten Bündels entspricht ihr die Gerade

$$\frac{U_1}{\sum_v a_{v1} \lambda_v} = \frac{U_2}{\sum_v a_{v2} \lambda_v} = \frac{U_3}{\sum_v a_{v3} \lambda_v}. \quad (3.)$$

Geht nun die Ebene (1.) durch die erste Gerade, so können wir die U_1, U_2, U_3 aus den Gleichungen (1.) und (2.) eliminieren und erhalten so zwischen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \lambda_1 \sum_v a_{1v} \lambda_v + \lambda_2 \sum_v a_{2v} \lambda_v + \lambda_3 \sum_v a_{3v} \lambda_v &\equiv \sum_{\mu v} a_{\mu v} \lambda_\mu \lambda_v \\ &\equiv \lambda_1 \sum_v a_{v1} \lambda_v + \lambda_2 \sum_v a_{v2} \lambda_v + \lambda_3 \sum_v a_{v3} \lambda_v = 0. \end{aligned}$$

Eliminieren wir nun hieraus die Größen $\sum_v a_{v1} \lambda_v, \sum_v a_{v2} \lambda_v, \sum_v a_{v3} \lambda_v$ mittelst der Gleichungen (3), so ergibt sich

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0$$

und es liegt somit die Gerade (3.) in der durch diese Gleichung bestimmten Ebene. Diese Ebene entspricht aber der Geraden, aufgefaßt als Strahl des ersten Bündels, im zweiten Bündel.

Bei zwei concentrischen reciproken Strahlenbündeln sind also im Allgemeinen jeder Ebene des Bündels zwei Gerade zugeordnet; geht die Ebene durch die eine dieser Geraden, so enthält sie auch die andere Gerade.

Im Allgemeinen wird also der von den Strahlen, die in ihren entsprechenden Ebenen liegen, gebildete Kegel von jeder dieser Ebenen in zwei Strahlen geschnitten und es umhüllen daher im Allgemeinen diese Ebenen nicht jenen Kegel, aber bilden allerdings einen Ebenen-

büschel der zweiten Ordnung. Wir überzeugen uns hiervon, indem wir die Strahlen des Strahlenkegels aus zwei seiner Strahlen durch Ebenen projicieren. Die hierdurch entstehenden Ebenenbüschel sind dann in Ansehung der Ebenen, welche denselben Strahl des Kegels projicieren, zu einander projectivisch, § 54. Betrachten wir nun deren Ebenen als Ebenen desselben Bündels, so entspricht jedem der Ebenenbüschel im anderen Bündel ein Strahlenbüschel, welche beide Strahlenbüschel zu einander projectivisch sind, in Ansehung der Strahlen, die den entsprechenden Ebenen der beiden projectivischen Ebenenbüschel zugeordnet sind. Nun entspricht dem Durchschnitte zweier entsprechenden Ebenen der beiden Ebenenbüschel, also einem Strahle des Strahlenkegels, die Verbindungsebene der den beiden Ebenen entsprechenden Strahlen der beiden Strahlenbüschel. Die den Strahlen des Strahlenkegels entsprechenden Ebenen sind also die Verbindungsebenen der entsprechenden Strahlen zweier concentrischer projectivischer Strahlenbüschel und bilden daher einen Ebenenbüschel der zweiten Ordnung (§ 54).

Dieser Ebenenbüschel der zweiten Ordnung umhüllt nur dann den Strahlenkegel, wenn jede seiner Ebenen mit dem Kegel eine einzige Gerade gemein hat, wenn also die beiden Strahlen, welche der Ebene entsprechen, zusammenfallen. Damit aber die beiden Strahlen, welche der Ebene

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0 \quad (1.)$$

entsprechen (2) und (3), sich vereinigen, ist notwendig und hinreichend, daß $a_{ik} = a_{ki}$, d. h. die Determinante $\Sigma \pm a_{11}, a_{22}, a_{33}$ eine symmetrische ist.

In diesem Falle erscheinen also die Elemente desselben Strahlenbündels — indem wir die beiden concentrisch liegenden reciproken Strahlenbündel als einen ansehen — einander eindeutig zugeordnet, und zwar entspricht jeder Ebene ein Strahl und umgekehrt jedem Strahle eine Ebene. Diese Lage zweier concentrischer reciproker Strahlenbündel wird die involutorische genannt, man sagt auch der Strahlenbündel sei involutorisch.

Wir können mit Anwendung dieser Ausdrücke das obige Ergebnis durch den Satz wiedergeben:

In zwei concentrischen reciproken Strahlenbündeln bilden die incidenten Strahlen einen Kegel und die incidenten Ebenen einen Ebenenbüschel der zweiten Ordnung; nur wenn die beiden Strahlenbündel involutorisch liegen, umhüllt der Ebenenbüschel der zweiten Ordnung den Strahlenkegel.

§ 66.

Reciproke ebene Systeme.

Der zweite Fall, daß die beiden gleichartigen Grundgebilde der zweiten Stufe zwei ebene Systeme seien, steht dem eben behandelten reciprok gegenüber. Wir wollen daher die dort gewonnenen Ergebnisse nach dem Gesetze der Reciprocität auf den vorliegenden Fall übertragen.

Sind

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0 \quad \text{und} \quad k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 = 0$$

die Gleichungen zweier ebenen Systeme, deren Elemente vermöge der Gleichung

$$\sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu} \lambda_\mu k_\nu = 0$$

reciprok auf einander bezogen sind, so genügen die Coordinaten jeder Ebene, welche einen Punct des einen mit seiner entsprechenden Geraden des anderen Systems verbindet, der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & V_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & V_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & V_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 & 0 \end{vmatrix} \equiv \sum_{ik} A_{ik} V_i U_k = 0.$$

Diese Gleichung ist nach den Coordinaten der Ebene, welche einen Punct des einen mit seiner entsprechenden Geraden des anderen Systems verbindet, vom zweiten Grade. Der Inbegriff der Ebenen, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen, soll ein Ebenenbündel der zweiten Ordnung genannt werden, da die obige Gleichung nach den Ebenencoordinaten vom zweiten Grade ist.

Zu demselben gehört sowohl die Ebene, welche durch die drei Puncte $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$, als auch durch $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ bestimmt wird, da durch Substitution der Coordinaten jeder dieser Ebenen offenbar die obige Determinante verschwindet. Die Ebenen des Ebenenbündels, welche durch einen Punct des Raumes gehen, bilden im Allgemeinen einen Ebenenbüschel der zweiten Ordnung. Durch eine Gerade gehen höchstens zwei Ebenen dieser Umhüllenden. Aber auch umgekehrt:

Jeder Ebenenbündel der zweiten Ordnung wird durch zwei reciproke ebene Systeme erzeugt, indem jede Verbindungsebene eines Punctes des einen mit der entsprechenden Geraden des anderen ebenen Systems eine Ebene des Ebenenbündels der zweiten Ordnung ist.

Die Annahme, daß die beiden reciproken ebenen Systeme in

dieselbe Ebene fallen, entspricht reciprok dem Falle, daß zwei reciproke Strahlenbündel concentrisch liegen. Wir wollen wieder, statt die früheren Rechnungen § 65 nur für andersdeutige Symbole zu wiederholen, die Resultate nach dem Gesetze der Reciprocität übertragen. Bemerken wir, daß einem Kegel als dem Erzeugnis zweier projectivischer Ebenenbüschel, deren Axen sich in einem Punkte schneiden, reciprok gegenüber steht (§ 54, 2) das Erzeugnis zweier projectivischer Punctreihen, deren Träger in einer Ebene liegen, also der Strahlenbüschel der zweiten Ordnung; und dem Ebenenbüschel der zweiten Ordnung, als dem Erzeugnis zweier concentrischer projectivischer Strahlenbüschel, das Erzeugnis zweier projectivischer Strahlenbüschel, die in derselben Ebene liegen, also ein Kegelschnitt, so erhalten wir aus § 66:

Liegen zwei reciproke ebene Systeme in einander, so bilden die incidenten Strahlen einen Strahlenbüschel der zweiten Ordnung und die incidenten Punkte einen Kegelschnitt; nur wenn die beiden in einander liegenden reciproken ebenen Systeme involutorisch sind, d. h. jedem Punkte der Ebene eine einzige Gerade und jeder Geraden ein einziger Punkt zugeordnet ist, so umhüllt der Strahlenbüschel der zweiten Ordnung gleichzeitig den Kegelschnitt.

Die für diese involutorische Lage notwendige Bedingung ist wieder, daß die Determinante $\Sigma \pm a_{11}, a_{22}, a_{33}$ symmetrisch sei.

§ 67.

Wir haben nun noch die Frage nach dem Erzeugnis zweier ungleichartiger reciproker Grundgebilde der zweiten Stufe, eines Strahlenbündels und eines reciproken ebenen Systems zu erledigen. Wir können dieselbe unmittelbar aus dem Vorhergehenden beantworten, ohne auf die Formeln, welche die Beziehung der beiden Grundgebilde ausdrücken, zurückgreifen zu müssen. Denn projicieren wir das ebene System aus dem Mittelpunkte des Strahlenbündels, so ist der projicierende Strahlenbündel S_1 zum ebenen System Σ collinear und daher zum anderen Strahlenbündel S reciprok: es sind daher die beiden Strahlenbündel zu einander reciprok.

So oft nun ein Strahl g' von S_1 in die entsprechende Ebene G von S fällt, liegt der G entsprechende Punkt g' von Σ in G ; und so oft eine Ebene E' von S' durch ihren entsprechenden Strahl e von S geht, wird die e entsprechende Gerade E' in Σ von e geschnitten. Somit:

„Sind ein Strahlenbündel und ebenes System zu einander reciprok, so bilden die Punkte des ebenen Systems, die in ihrer entsprechenden

Ebene des Strahlenbündels liegen, sammt den Puncten, in denen die Geraden des ebenen Systems von ihren entsprechenden Strahlen des Strahlenbündels geschnitten werden, einen Kegelschnitt; und alle Geraden des ebenen Systems, welche ihre entsprechenden Strahlen des Strahlenbündels schneiden, sammt den Durchschnittslinien der Ebenen des Bündels, welche durch ihre entsprechenden Puncte des ebenen Systems gehen, einen Strahlenbüschel der zweiten Ordnung.“

Die Ebenen des Strahlenbündels, welche durch ihre entsprechenden Puncte des ebenen Systems gehen, projicieren diesen Strahlenbüschel der zweiten Ordnung und constituieren daher einen Ebenenbüschel der zweiten Ordnung; die Strahlen des Strahlenbündels, welche ihre entsprechenden Geraden im ebenen Systeme schneiden, projicieren jenen Kegelschnitt und bilden daher einen Kegel der zweiten Ordnung.

Zu denselben Ergebnissen wären wir gelangt, wenn wir statt des Bündels S' das ebene System zu Hülfe genommen hätten, das durch den Strahlenbündel auf den Träger von Σ induciert wird.

§ 68.

Die Erzeugnisse zweier collinearer Grundgebilde der zweiten Stufe.

Es seien zunächst die beiden collinearen Grundgebilde der zweiten Stufe

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0, \quad k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 = 0 \quad (1.)$$

gleichartig, ihre collineare Beziehung werde also vermittelt eines Proportionalitätsfactors ϱ durch drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \varrho \lambda_1 &= a_{11} k_1 + a_{12} k_2 + a_{13} k_3 \\ \varrho \lambda_2 &= a_{21} k_1 + a_{22} k_2 + a_{23} k_3 \\ \varrho \lambda_3 &= a_{31} k_1 + a_{32} k_2 + a_{33} k_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.)$$

ausgedrückt. Aus ihnen folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma k_1 &= A_{11} \lambda_1 + A_{21} \lambda_2 + A_{31} \lambda_3 \\ \sigma k_2 &= A_{12} \lambda_1 + A_{22} \lambda_2 + A_{32} \lambda_3 \\ \sigma k_3 &= A_{13} \lambda_1 + A_{23} \lambda_2 + A_{33} \lambda_3 \end{aligned} \right\}, \quad (3.)$$

worin σ ein Proportionalitätsfactor und A_{ik} die Subdeterminante des Elementes a_{ik} in der Determinante $\Sigma \pm a_{11}, a_{22}, a_{33}$ bedeutet.

Dem Elemente des ersten Grundgebildes

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0 \quad (3')$$

entspricht (§ 59) im zweiten Grundgebilde das Element

$$V_1 \sum_i A_{i1} \lambda_i + V_2 \sum_i A_{i2} \lambda_i + V_3 \sum_i A_{i3} \lambda_i = 0,$$

welche Gleichung nach λ geordnet übergeht in:

$$\lambda_1 \sum_i A_{1i} V_i + \lambda_2 \sum_i A_{2i} V_i + \lambda_3 \sum_i A_{3i} V_i = 0. \quad (4.)$$

Dem Elemente des zweiten Grundgebildes

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3 = 0 \quad (5.)$$

entspricht im ersten Grundgebilde das Element

$$U_1 \sum_i a_{1i} k_i + U_2 \sum_i a_{2i} k_i + U_3 \sum_i a_{3i} k_i = 0,$$

dessen Gleichung auch in der Form geschrieben werden kann

$$k_1 \sum_i a_{i1} U_i + k_2 \sum_i a_{i2} U_i + k_3 \sum_i a_{i3} U_i = 0. \quad (6.)$$

Jede lineare Gleichung zwischen den Parametern eines Grundgebildes bestimmt eine Gerade desselben; die lineare Relation, welche durch diese Gleichung zwischen den Parametern des anderen Grundgebildes hergestellt wird, bestimmt die entsprechende Gerade im anderen Grundgebilde. Die lineare Gleichung

$$\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3 = 0$$

bestimmt im ersten Grundgebilde die Gerade

$$\frac{U_1}{\alpha_1} = \frac{U_2}{\alpha_2} = \frac{U_3}{\alpha_3} \quad (7.)$$

und der entspricht hiernach im anderen Grundgebilde die Gerade

$$\frac{V_1}{\sum_i a_{i1} \alpha_i} = \frac{V_2}{\sum_i a_{i2} \alpha_i} = \frac{V_3}{\sum_i a_{i3} \alpha_i}. \quad (8.)$$

Der Geraden des zweiten Grundgebildes, welche durch die Gleichung

$$\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3 = 0$$

bestimmt wird, d. h. der Geraden

$$\frac{V_1}{\beta_1} = \frac{V_2}{\beta_2} = \frac{V_3}{\beta_3} \quad (9.)$$

entspricht im ersten Grundgebilde die Gerade

$$\frac{U_1}{\sum_i A_{1i} \beta_i} = \frac{U_2}{\sum_i A_{2i} \beta_i} = \frac{U_3}{\sum_i A_{3i} \beta_i}. \quad (10.)$$

Sowohl die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in (7.), als auch $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ in (9.) können wir aber bezüglich aus den Gleichungen (8.) und (10.) durch die Coordinaten irgend eines Punctes der durch diese Gleichungen bestimmten Geraden ausdrücken. Wir erhalten so durch Elimination der α aus (7.) und (8.) als Gleichung der Geraden

$$\frac{V_1}{\sum_i a_{i1} U_i} = \frac{V_2}{\sum_i a_{i2} U_i} = \frac{V_3}{\sum_i a_{i3} U_i}, \quad (11.)$$

welche Gleichungen durch Berechnung von U_1, U_2, U_3 sich als äquivalent erweisen mit

$$\frac{U_1}{\sum_i A_{1i} V_i} = \frac{U_2}{\sum_i A_{2i} V_i} = \frac{U_3}{\sum_i A_{3i} V_i} \quad (12.)$$

und somit auch durch Elimination der β aus (9.) und (10.) abgeleitet werden können.

Schneiden sich nun irgend zwei entsprechende Gerade der beiden collinearen Grundgebilde in einem Punkte, so genügen dessen Coordinaten den Gleichungen (11.), (12.), und offenbar umgekehrt: Jeder Punkt, dessen Coordinaten diesen Gleichungen genügen, ist der Durchschnittspunkt zweier entsprechenden Strahlen der beiden Bündel. Denn sind

$$\frac{U_1}{\alpha_1} = \frac{U_2}{\alpha_2} = \frac{U_3}{\alpha_3} \quad (7.)$$

die Gleichungen des Strahles des ersten Bündels, welcher durch diesen Punkt geht, so genügen die Coordinaten dieses Punktes, wie die Elimination von U_1, U_2, U_3 aus (7.) und (11.) lehrt, auch der Gleichung

$$\frac{V_1}{\sum_i a_{i1} \alpha_i} = \frac{V_2}{\sum_i a_{i2} \alpha_i} = \frac{V_3}{\sum_i a_{i3} \alpha_i},$$

also der Gleichung des entsprechenden Strahles im anderen Strahlenbündel.

Der geometrische Ort der Durchschnittspunkte je zweier entsprechender Strahlen der beiden Strahlenbündel stellt sich nach den obigen Gleichungen (11.), da jede derselben eine Regelfläche repräsentiert (§ 51), als der gemeinsame Durchschnitt der drei Regelflächen dar:

$$V_1 \sum_i a_{i2} U_i - V_2 \sum_i a_{i1} U_i = 0$$

$$V_1 \sum_i a_{i3} U_i - V_3 \sum_i a_{i1} U_i = 0$$

$$V_2 \sum_i a_{i3} U_i - V_3 \sum_i a_{i2} U_i = 0.$$

Diese drei Regelflächen befinden sich aber, wie aus diesen Gleichungen sofort erkannt wird, nicht in unabhängiger Lage von einander. Zunächst springt in die Augen, daß je zwei derselben sich in einer Geraden schneiden. Die erste und zweite haben die Gerade

$$V_1 = 0, \quad \sum_i a_{i1} U_i = 0,$$

die erste und dritte die Gerade

$$V_2 = 0, \quad \sum_i a_{i2} U_i = 0,$$

und die zweite und dritte Regelfläche die Gerade

$$V_3 = 0, \quad \sum_i a_{i3} U_i = 0$$

gemeinsam. Durch die anderweitigen Durchschnittspuncte je zweier dieser Regelflächen geht aber auch die dritte hindurch.

Um dies klar zu machen, setzen wir der Kürze halber

$$V_2 \sum_i a_{i3} U_i - V_3 \sum_i a_{i2} U_i \equiv R_1$$

$$V_2 \sum_i a_{i1} U_i - V_1 \sum_i a_{i2} U_i \equiv R_2$$

$$V_3 \sum_i a_{i1} U_i - V_1 \sum_i a_{i3} U_i \equiv R_3.$$

Dann ist:

$$R_1 \sum_i a_{i1} U_i + R_2 \sum_i a_{i2} U_i = R_3 \sum_i a_{i3} U_i.$$

Es verschwindet somit R_3 für die Coordinaten jedes Punctes, der den Regelflächen $R_1 = 0$ und $R_2 = 0$ gemeinsam und nicht in der Ebene $\sum_i a_{i3} U_i = 0$ gelegen ist. Die Durchschnittspuncte der Regelfläche $R_1 = 0$ und $R_2 = 0$, welche in der Ebene $\sum_i a_{i3} U_i = 0$ enthalten sind, liegen aber, wie die Gleichungen dieser Regelflächen unmittelbar zeigen, alle in der diesen beiden Regelflächen gemeinsamen Geraden

$$V_3 = 0, \quad \sum_i a_{i3} U_i = 0,$$

womit die obige Behauptung erhärtet ist.

Wir können aber offenbar jedes der drei Verhältnisse in (11.), abgesehen von einem gemeinsamen Factor, durch das der linken Seite der Gleichungen irgend zweier entsprechender Ebenen der beiden Strahlenbündel ersetzen. Denn sind m_1, m_2, m_3 irgend drei Constante, so ist jedes dieser Verhältnisse gleich

$$\frac{m_1 V_1 + m_2 V_2 + m_3 V_3}{m_1 \sum_i a_{i1} U_i + m_2 \sum_i a_{i2} U_i + m_3 \sum_i a_{i3} U_i}.$$

Der Ebene $m_1 V_1 + m_2 V_2 + m_3 V_3 = 0$ des zweiten Bündels entspricht aber (6.) im ersten Bündel die Ebene

$$m_1 \sum_i a_{i1} U_i + m_2 \sum_i a_{i2} U_i + m_3 \sum_i a_{i3} U_i = 0.$$

Sind daher $P = 0, Q = 0$ und $R = 0$ die Gleichungen dreier Ebenen des ersten und $P' = 0, Q' = 0, R' = 0$ jene der ihnen bezüglich entsprechenden Ebenen des zweiten Bündels, so stellen die Gleichungen

$$p \frac{P}{P'} = q \frac{Q}{Q'} = r \frac{R}{R'}, \quad (13.)$$

wo p, q, r von den Gleichungen der Ebenen abhängige Constante sind, den geometrischen Ort der Durchschnittspuncte je zweier entsprechender Strahlen der beiden Bündel dar. Jede dieser Gleichungen repräsentiert eine Regelfläche, von denen die eine oder auch alle Kegelflächen sein können, und von denen je zwei sich in einer Ge-

raden schneiden; die übrigen Durchschnittspuncte sind allen drei Regelflächen gemeinsam und die von ihnen gebildete Curve ist der gesuchte geometrische Ort.

Die Gleichungen (13.) lehren unmittelbar noch eine andere Bestimmungsweise der Curve. Die erste dieser drei Regelflächen wird durch die Gleichung dargestellt

$$p P Q' - q Q P' = 0$$

und kann daher als das Ergebnis der beiden projectivischen Ebenenbündel

$$P + \frac{\lambda}{p} Q = 0, \quad P' + \frac{\lambda}{q} Q' = 0$$

aufgefaßt werden. Daraus folgt:

„Jede Regelfläche und Kegelfläche, welche durch zwei entsprechende Ebenenbündel der beiden collinearen Strahlenbündel erzeugt wird, enthält die Durchschnittspuncte der entsprechenden Strahlen der beiden collinearen Bündel.“

Wir können aber die drei Regelflächen

$$p P Q' - q Q P' = 0, \quad p P R' - r P' R = 0, \\ q Q R' - r Q' R = 0$$

auch als das Erzeugnis je zweier der drei projectivischen Ebenenbündel

$$P + \frac{\lambda}{p} P' = 0, \quad Q + \frac{\lambda}{q} Q' = 0, \quad R + \frac{\lambda}{r} R' = 0$$

betrachten. Da nun je zwei der drei Regelflächen eine Axe dieser drei Ebenenbündel gemeinsam haben, so folgt:

„Die Curve der Durchschnittspuncte der entsprechenden Strahlen zweier collinearer Strahlenbündel ist der geometrische Ort der Durchschnittspuncte der entsprechenden Ebenen dreier projectivischer Ebenenbündel.“ Und umgekehrt:

Da die Curve der Durchschnitt zweier Regelflächen ist, die einen Strahl gemeinsam haben, so wird sie von einer Ebene im Allgemeinen in drei Puncten geschnitten. Denn diese Ebene wird von jeder der beiden Regelflächen in einem Kegelschnitte geschnitten: also sind die vier Durchschnittspuncte dieser beiden Kegelschnitte den beiden Regelflächen gemeinsam. Da nun einer derselben ein Punct des den beiden gemeinsamen Strahles ist, so sind bloß die drei übrigen Puncte Durchschnittspuncte der Ebene mit unserer Curve; also:

Die Curve wird von einer Ebene im Allgemeinen in drei und nie in mehr als drei Puncten geschnitten; sie wird deshalb eine Raumcurve der dritten Ordnung genannt.

Die Durchschnittspuncte der entsprechenden Strahlen zweier collinearer Strahlenbündel bilden eine Raum-

curve der dritten Ordnung, die durch die Mittelpuncte der beiden Strahlenbündel hindurchgeht. Die Puncte derselben werden aus je zwei entsprechenden Strahlen der beiden Bündel durch zwei projectivische Ebenenbüschel und aus jedem ihrer Puncte durch eine Kegelfläche projectiert. Die Curve kann auch als der Durchschnitt zweier Regelflächen aufgefaßt werden, die einen Strahl gemeinsam haben, oder als der Ort der Durchschnittspuncte der entsprechenden Ebenen dreier projectivischer Ebenenbüschel.

§ 69.

Fortsetzung.

Die Curve der dritten Ordnung zerfällt bei gewissen Lagen der beiden collinearen Strahlenbündel. Da dieselbe der gemeinsame Durchschnitt der drei Regelflächen

$$\begin{aligned} p P Q' - q Q P' &= 0, & p P R' - r P' R &= 0, \\ q Q R' - r Q' R &= 0 \end{aligned}$$

ist, so werden sich ihre Degenerationen aus diesen Gleichungen ergeben.

1) Haben beide Bündel eine Fläche gemeinsam, ist also etwa $P \equiv P'$, so erscheint, wenn wir P und P' prim voraussetzen, die Curve als der gemeinsame Durchschnitt der drei Flächen

$$\begin{aligned} P (p Q' - q Q) &= 0, & P (p R' - r R) &= 0, \\ q Q R' - r Q' R &= 0 \end{aligned}$$

Der gemeinsame Durchschnitt dieser drei Flächen besteht aber aus zwei Curven: 1. dem Kegelschnitte, den die Regelfläche

$$q Q R' - r Q' R = 0$$

in der Ebene $P = 0$ ausschneidet und 2. der Geraden

$$p Q' - q Q = 0, \quad p R' - r R = 0,$$

denn jeder ihrer Puncte ist ein Punct der Regelfläche, da

$$q Q R' - r Q' R \equiv q Q (p R' - r R) - r R (p Q' - q Q)$$

ist, also seine Coordinaten der Gleichung der Regelfläche genügen.

Die Curve dritter Ordnung zerfällt somit, im Falle die beiden collinearen Bündel eine Ebene entsprechend gemein haben, in einen Kegelschnitt und eine Gerade.

2) Ist nicht nur $\rho P \equiv P'$, sondern auch $\sigma Q = Q'$, so stellt sich die Curve der dritten Ordnung als der gemeinsame Durchschnitt der drei Flächen dar

$$(p\sigma - q\rho) PQ = 0, \quad P(pR' - r\rho R) = 0;$$

$$Q(qR' - r\sigma R) = 0.$$

Derselbe besteht aus den drei Geraden

$$P = 0, \quad Q = 0$$

$$P = 0, \quad r\rho R - pR' = 0$$

$$Q = 0, \quad r\sigma R - qR' = 0,$$

denn die Coordinaten jedes Punctes dieser drei Geraden genügen den Gleichungen jeder der drei Flächen.

Wir erhalten so den Satz:

„Ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier collinearer Strahlenbündel ein sich selbst entsprechender Strahl, so zerfällt das Erzeugnis derselben in drei Gerade.“

Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Strahlenbündel trägt in diesem Falle zwei entsprechende Ebenenbüschel der beiden collinearen Bündel und es haben daher die beiden Bündel die Doppelsebenen der beiden Ebenenbüschel gemeinsam. Und umgekehrt: Fallen zwei Paare entsprechender Ebenen der beiden collinearen Bündel zusammen, so ist die Schnittlinie dieser beiden Ebenen — die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Strahlenbündel — ein sich selbst entsprechender Strahl.

3) Ohne concentrisch zu werden, können die beiden Strahlenbündel drei Paare entsprechender Ebenen gemeinsam haben, nur wenn die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte ein sich selbst entsprechender Strahl ist. Derselbe ist dann der Träger zweier entsprechender Ebenenbüschel der beiden collinearen Grundgebilde und diese können dann drei Paare entsprechender Ebenen gemeinsam haben, ohne concentrisch liegen zu müssen. Es fallen dann alle entsprechenden Ebenen der beiden Ebenenbüschel zusammen, da dieselben projectivisch sind und die beiden Strahlenbündel haben also in diesem Falle zwei Ebenenbüschel entsprechend gemein.

Es läßt sich leicht zeigen, daß unter dieser Voraussetzung jede Regelfläche, welche durch irgend zwei entsprechende Ebenenbüschel der beiden collinearen Bündel erzeugt wird, in eine fixe Ebene und eine Ebene des gemeinsamen Ebenenbüschels degeneriert.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Bemerkung, daß die beiden Ebenenbüschel eine sich selbst entsprechende Ebene gemeinsam haben § 55 oder auch auf folgende Weise, wenn wir die beiden Strahlenbündel auf entsprechende Elemente als Grundelemente beziehen. Sind U und U' , V und V' , W und W' drei Paare entsprechender Ebenen der beiden Strahlenbündel, sind also

$\lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3 W = 0$ und $\lambda'_1 U' + \lambda'_2 V' + \lambda'_3 W' = 0$
deren Gleichungen, so haben in diesem Falle die Verwandtschafts-
gleichungen der Collineation die Form

$$\varrho \lambda'_1 = m_1 \lambda_1, \quad \varrho \lambda'_2 = m_2 \lambda_2, \quad \varrho \lambda'_3 = m_3 \lambda_3.$$

Haben die beiden Strahlenbündel ein Ebenenbüschel entsprechend
gemein, so seien $U \equiv U'$ und $V \equiv V'$ zwei Ebenen dieses Ebenen-
büschels. Die Gleichungen der beiden Strahlenbüschel sind dann also

$$\lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3 W = 0, \quad \lambda'_1 U + \lambda'_2 V + \lambda'_3 W' = 0.$$

Sind daher $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und μ_1, μ_2, μ_3 die Parameter irgend zweier
Ebenen des ersten, $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ und μ'_1, μ'_2, μ'_3 die der entsprechenden
Ebenen des zweiten Strahlenbündels, so erzeugen die beiden projec-
tivischen Ebenenbüschel, welche von ihren Durchschnittslinien ge-
tragen werden, die Regelfläche

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3 W, & \mu_1 U + \mu_2 V + \mu_3 W \\ m_1 \lambda_1 U + m_2 \lambda_2 V + m_3 \lambda_3 W', & m_1 \mu_1 U + m_2 \mu_2 V + m_3 \mu_3 W' \end{vmatrix} = 0.$$

Da nun die entsprechenden Ebenen des gemeinsamen Ebenenbüschels
zusammenfallen, so ist:

$$\begin{aligned} \lambda_1 U + \lambda_2 V &\equiv m_1 \lambda_1 U + m_2 \lambda_2 V \\ \mu_1 U + \mu_2 V &\equiv m_1 \mu_1 U + m_2 \mu_2 V; \end{aligned}$$

daher ist die Gleichung unserer Fläche

$$\begin{vmatrix} (W - m_3 W'), & \mu_3 (W - m_3 W') \\ m_1 \lambda_1 U + m_2 \lambda_2 V + m_3 \lambda_3 W, & m_1 \mu_1 U + m_2 \mu_2 V + m_3 \mu_3 W \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(W - m_3 W') [m_1 (\mu_1 \lambda_3 - \mu_3 \lambda_1) U + m_2 (\mu_2 \lambda_3 - \mu_3 \lambda_2) V] = 0.$$

Sie besteht somit aus der Ebene des gemeinsamen Ebenenbüschels

$$m_1 (\mu_1 \lambda_3 - \mu_3 \lambda_1) U + m_2 (\mu_2 \lambda_3 - \mu_3 \lambda_2) V = 0$$

und aus der festen Ebene

$$W - m_3 W' = 0.$$

Die Regelflächen, welche durch je zwei entsprechende Ebenenbüschel
der beiden collinearen Strahlenbündel erzeugt werden, haben somit
die Ebene $W - m_3 W' = 0$ und die Verbindungslinie der Mittel-
puncte der beiden Strahlenbündel gemeinsam. Es schneiden sich
somit je zwei entsprechende Strahlen der beiden Strahlenbündel auf
dieser Ebene $W - m_3 W' = 0$.

Wir gewinnen somit den Satz:

Haben zwei collineare Strahlenbündel einen Ebenen-
büschel gemeinsam, so liegen die Durchschnittspuncte
ihrer entsprechenden Strahlen in einer Ebene.

Man sagt von zwei collinearen Strahlenbündeln, deren entsprechende Strahlen sich auf einer Ebene schneiden, sie seien oder lägen perspectivisch. Wir können mit Benutzung dieses Begriffes den obigen Satz folgendermaßen aussprechen:

Zwei collineare Strahlenbündel, die einen Ebenenbüschel entsprechend gemein haben, liegen perspectivisch.

4) Haben die beiden Strahlenbündel drei Ebenen, die nicht demselben Ebenenbüschel angehören, gemeinsam, so fallen ihre Mittelpunkte zusammen, sie liegen concentrisch. Wir können in diesem Falle jeden der beiden Strahlenbündel auf dieselben drei Ebenen als Grundebenen beziehen. Es seien etwa $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ diese drei Ebenen und

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0, \quad k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 = 0$$

die Gleichungen der beiden collinearen Strahlenbündel, deren Elemente durch die Gleichungen

$$\varrho \lambda_1 = a_{11} k_1 + a_{12} k_2 + a_{13} k_3; \quad \varrho \lambda_2 = a_{21} k_1 + a_{22} k_2 + a_{23} k_3; \\ \varrho \lambda_3 = a_{31} k_1 + a_{32} k_2 + a_{33} k_3$$

einander zugewiesen werden mögen.

Die Frage nach dem geometrischen Orte der Durchschnittspunkte der entsprechenden Strahlen der beiden collinearen Strahlenbündel entfällt hier offenbar, da sich alle Strahlen derselben im gemeinsamen Mittelpunkte schneiden; sollen daher zwei entsprechende Strahlen der beiden Strahlenbündel sich in noch einem Punkte schneiden, so fallen sie zusammen, was offenbar nur bei einer endlichen Anzahl der Fall sein kann. An Stelle der früheren Frage tritt also jetzt die Frage nach den zusammenfallenden entsprechenden Strahlen, oder, da die Ebene je zweier solcher Strahlen eine sich selbst entsprechende Ebene der beiden Strahlenbündel ist, die Frage nach den zusammenfallenden entsprechenden Ebenen der beiden Strahlenbündel. Sollen nun zwei entsprechende Ebenen unserer beiden Strahlenbündel zusammenfallen, so muß $\lambda_1 = k_1$; $\lambda_2 = k_2$; $\lambda_3 = k_3$ sein, und zur Bestimmung dieser Größen dienen die beiden Gleichungen

$$\frac{\lambda_1}{a_{11} \lambda_1 + a_{12} \lambda_2 + a_{13} \lambda_3} = \frac{\lambda_2}{a_{21} \lambda_1 + a_{22} \lambda_2 + a_{23} \lambda_3} \\ = \frac{\lambda_3}{a_{31} \lambda_1 + a_{32} \lambda_2 + a_{33} \lambda_3},$$

aus denen sich $\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$ und $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$ berechnen lassen. Wir gelangen aber auch zur Kenntniss dieser Größen, indem wir zuerst den gemeinsamen Wert dieser drei Verhältnisse $\frac{1}{\varrho}$ bestimmen. Es bestehen nämlich dann die drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \varrho) \lambda_1 + a_{12} \lambda_2 + a_{13} \lambda_3 &= 0 \\ a_{21} \lambda_1 + (a_{22} - \varrho) \lambda_2 + a_{23} \lambda_3 &= 0 \\ a_{31} \lambda_1 + a_{32} \lambda_2 + (a_{33} - \varrho) \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{I.})$$

aus welchen sich aber $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nur dann bestimmen lassen, wenn ϱ eine Wurzel der Gleichung

$$\Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Da diese Gleichung nach ϱ vom dritten Grade ist, so bestehen drei Werte von ϱ , für welche das Gleichungssystem (I.) auflösbar wird. Wir erhalten auf diese Weise drei Wertgruppen von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, deren jede eine Doppelebene der beiden collinearen Strahlenbündel bestimmt. Somit:

Zwei concentrische collineare Strahlenbündel besitzen drei Doppelstrahlen und drei Doppelebenen.

Die Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ hat mindestens eine reelle Wurzel, somit ist stets eine dieser drei Doppelebenen reell; die beiden anderen sind gleichzeitig reell oder imaginär. Es ist aber auch stets einer der drei Doppelstrahlen reell.

Denn ist

$$\frac{U_1}{\alpha_1} = \frac{U_2}{\alpha_2} = \frac{U_3}{\alpha_3}$$

die Gleichung eines Doppelstrahles, so müssen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ den Gleichungen genügen (7. und 8.)

$$\frac{\sum_i a_{i1} \alpha_i}{\alpha_1} = \frac{\sum_i a_{i2} \alpha_i}{\alpha_2} = \frac{\sum_i a_{i3} \alpha_i}{\alpha_3}.$$

Der gemeinsame Wert dieser Verhältnisse ϱ ergibt sich daher aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} (a_{11} - \varrho) \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 + a_{13} \alpha_3 &= 0 \\ a_{21} \alpha_1 + (a_{22} - \varrho) \alpha_2 + a_{23} \alpha_3 &= 0 \\ a_{31} \alpha_1 + a_{32} \alpha_2 + (a_{33} - \varrho) \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

durch Elimination von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Zur Berechnung des ϱ erhalten wir also auch hier die Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$, deren jede Wurzel daher einen Doppelstrahl der beiden concentrischen collinearen Strahlenbündel bestimmt. Jede Wurzel von $\Delta(\varrho) = 0$ bestimmt somit sowohl eine Doppelebene als auch einen Doppelstrahl der beiden concentrischen collinearen Strahlenbündel; also die reelle Wurzel sowohl einen reellen Doppelstrahl als auch eine reelle Doppelebene.

§ 70.

Der Ebenenbüschel der dritten Ordnung.

Wir wenden uns nunmehr der Betrachtung des anderen Falles zu, in welchem die beiden collinearen Grundgebilde gleichartig sind, des Falles, daß dieselben zwei collineare ebene Systeme sind. Es steht dieser Fall dem eben behandelten Falle, in welchem die beiden Grundgebilde zwei Strahlenbüschel waren, reciprok gegenüber und wir wollen daher, statt die vorhergehenden Rechnungen und Schlüsse mit Berücksichtigung der veränderten Bedeutung der einzelnen Symbole zu wiederholen, gleich die erhaltenen Resultate mittelst des Gesetzes der Reciprocität auf den vorliegenden Fall übertragen.

Jedem Punkte der Curve der dritten Ordnung entspricht reciprok eine Ebene und daher der Gesamtheit ihrer Punkte, als einer einfach unendlichen Reihe, eine einfach unendliche Reihe von Ebenen. Dieselbe wird eine Developpable oder Umhüllende der dritten Klasse oder auch ein Ebenenbüschel der dritten Ordnung genannt, da, nach dem Gesetze der Reciprocität, durch jeden Punct des Raumes drei Ebenen dieses Gebildes hindurchgehen.

Jeder Regelschar, aufgefaßt als das Erzeugnis zweier reciproker Ebenenbüschel, entspricht reciprok das Erzeugnis zweier reciproker Punctreihen, deren Träger sich nicht schneiden, also wieder eine Regelschar. Der Leitschar der einen entspricht die Leitschar der anderen; jeder Berührungsebene der einen ein Punct der anderen etc. Somit ergiebt sich aus § 68:

Die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen zweier collinearer ebener Systeme bilden einen Ebenenbüschel der dritten Ordnung, dem auch die Träger der beiden ebenen Systeme angehören. Die Ebenen desselben werden von je zwei entsprechenden Geraden der beiden ebenen Systeme in projectivischen Punctreihen und von jeder Ebene in einem Strahlenbüschel der zweiten Ordnung geschnitten. Der Ebenenbüschel der dritten Ordnung stellt sich auch dar als die Gesamtheit der gemeinsamen Berührungsebenen zweier Regelflächen, die einen Strahl gemeinschaftlich haben, auch als der Inbegriff aller Ebenen, die durch die entsprechenden Punkte dreier projectivischer Punctreihen bestimmt werden.

Der Ebenenbüschel der dritten Ordnung zerfällt bei besonderen Lagen der beiden collinearen ebenen Systeme (§ 69).

Haben die beiden Systeme einen Punct ihrer Schnittlinie entsprechend gemein, so zerfällt der Ebenenbüschel der dritten Ordnung

in eine Gerade und einen Ebenenbüschel der zweiten Ordnung, dessen Mittelpunkt jener Punkt ist.

Haben die beiden collinearen Systeme zwei Punkte ihrer Schnittlinie entsprechend gemein, so zerfällt der Ebenenbüschel der dritten Ordnung in drei Gerade, von denen die eine die Schnittlinie der beiden Systeme ist, während jede der beiden anderen durch einen der beiden sich selbst entsprechenden Punkte der Schnittlinie hindurchgeht.

Liegen auf der Schnittlinie der beiden collinearen Systeme drei sich selbst entsprechende Punkte der beiden Systeme, so haben sie die beiden Punktreihen auf der Schnittlinie gemeinsam; dann liegen je zwei entsprechende Gerade der beiden ebenen Systeme in einer Ebene, und alle diese Ebenen sowohl als auch die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte gehen durch einen Punkt des Raumes. Nennen wir nun zwei collineare ebene Systeme, bei denen die Verbindungslinien entsprechender Punkte sich in einem Punkte vereinigen, perspectivisch, so haben wir den Satz:

Haben zwei collineare ebene Systeme eine Punktreihe entsprechend gemein, so liegen sie perspectivisch.

Haben endlich die beiden collinearen ebenen Systeme drei Punkte ihrer Ebenen entsprechend gemein, so fallen sie in einander. Die beiden Systeme besitzen dann drei Doppelpunkte und somit auch drei Doppelgerade. In jeden dieser beiden Tripel von Doppелеlementen ist mindestens ein Element reell; die beiden anderen sind in beiden Tripeln gleichzeitig reell oder imaginär und werden stets von den reellen Elementen des anderen Tripels getragen.

Zwei in einander liegende collineare ebene Systeme haben drei Doppelpunkte und drei Doppelgeraden, von welchen mindestens ein Doppelpunkt und eine Doppelgerade reell ist.

§ 71.

Die Raumcurve und der Ebenenbüschel der dritten Ordnung.

Die Raumcurve und der Ebenenbüschel der dritten Ordnung stehen nicht allein einander reciprok gegenüber, sondern auch noch in einer anderen engen Beziehung, welche wir nunmehr erörtern wollen. Zunächst soll aber aus der Entstehungsweise der beiden Gebilde (§ 68 und § 70) eine neue analytische Repräsentation derselben hergeleitet werden, bei welcher Ableitung wir aber nur das eine der beiden Gebilde zu berücksichtigen brauchen, da die für das eine gewonnenen Resultate sich nach dem Gesetze der Reciprocität auf das andere werden übertragen lassen.

Wir wollen etwa die Raumcurve der dritten Ordnung unserer

Untersuchung zu Grunde legen und von der Eigenschaft derselben ausgehen, daß sie der geometrische Ort der Schnittpuncte je dreier entsprechender Ebenen dreier projectivischer Ebenenbüschel sei. Es seien nun

$$\left. \begin{aligned} M &\equiv m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 \\ N &\equiv n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 \\ P &\equiv p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 \\ Q &\equiv q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 + q_4 x_4 \\ R &\equiv r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 + r_4 x_4 \\ S &\equiv s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + s_4 x_4 \end{aligned} \right\} \quad (1.)$$

die sechs Grundebenen der drei die Raumcurve erzeugenden Ebenenbüschel. Werden diese selbst dargestellt durch:

$$M + \lambda N = 0; \quad P + \lambda Q = 0; \quad R + \lambda S = 0, \quad (2.)$$

so ist der Durchschnittspunct je dreier Ebenen, welche in diesem Gleichungssysteme durch dasselbe λ bestimmt werden, ein Punct der Curve.

Berechnen wir aber aus (2.) die Coordinaten dieses Punctes, so ergeben sie sich in der Form:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 \\ \varrho x_2 &= b_0 \lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 \\ \varrho x_3 &= c_0 \lambda^3 + c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_3 \\ \varrho x_4 &= d_0 \lambda^3 + d_1 \lambda^2 + d_2 \lambda + d_3, \end{aligned}$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Setzen wir daher

$$\begin{aligned} a_0 u_1 + b_0 u_2 + c_0 u_3 + d_0 u_4 &\equiv M_0 \\ a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 + d_1 u_4 &\equiv M_1 \\ a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3 + d_2 u_4 &\equiv M_2 \\ a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3 + d_3 u_4 &\equiv M_3, \end{aligned}$$

so ist, wenn wir die u_1, u_2, u_3, u_4 als Ebenencoordinaten betrachten,

$$M_0 \lambda^3 + M_1 \lambda^2 + M_2 \lambda + M_3 = 0 \quad (3.)$$

die Gleichung des Curvenpunctes. Es stellt also die Gleichung (3.) für jeden Wert des λ einen Punct unserer Curve dar, und lassen wir daher hierin das λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhalten wir die Gesamtheit aller Puncte der Curve. Wir können somit die obige Gleichung als eine analytische Darstellung dieser Curve betrachten.

Daß auch umgekehrt jede derartige Gleichung eine Curve der dritten Ordnung repräsentiert, ist an sich klar; wir können uns aber hiervon auch in folgender Weise überzeugen, die zu einer neuen analytischen Darstellung der Curve führt.

Gehen wir von (4.) zu den Coordinaten des Curvenpunctes zurück, so werden wir wieder auf die Gleichungen (3.) geführt. Bezeichnen wir nun in der Determinante $\Sigma \pm a_0 b_1 c_2 d_3$ die Subdeterminante irgend eines Elementes mit demselben Index und denselben aber grossen Buchstaben, so ist, wenn wir der Kürze halber

$$A_0 x_1 + B_0 x_2 + C_0 x_3 + D_0 x_4 \equiv W_0$$

$$A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3 + D_1 x_4 \equiv W_1$$

$$A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 + D_2 x_4 \equiv W_2$$

$$A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3 + D_3 x_4 \equiv W_3$$

setzen,

$$W_0 : W_1 : W_2 : W_3 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1. \quad (4.)$$

Hieraus ergibt sich auch

$$W_0 - \lambda W_1 = 0 \quad W_1 - \lambda W_2 = 0 \quad W_2 - \lambda W_3 = 0, \quad (5.)$$

und es ist also der Durchschnittspunct je dreier Ebenen, welche hieraus durch dasselbe λ bestimmt werden, ein Punct der Curve. Die Curve erscheint sonach als das Erzeugnis der drei projectivischen Ebenenbüschel (5.). Zu dieser Darstellung der Curve hätten wir auch unmittelbar gelangen können, welche Thatsache neuerdings beweist, daß die Gleichung (3.) eine allgemeine Curve der dritten Ordnung repräsentiert. Denken wir uns nämlich die Curve durch eine Ebene $W_1 = 0$ geschnitten und projicieren wir aus zwei von den drei in dieser Ebene gelegenen Secanten die Curvenpuncte, so sind die beiden projicierenden Ebenenbüschel zu einander projectivisch, da sie einen Kegel erzeugen (§ 68). Ist daher $W_0 = 0$ die Ebene, die in dem einen, und $W_2 = 0$ die Ebene, die in dem anderen Ebenenbüschel der Ebene $W_1 = 0$ entspricht, so können die beiden Ebenenbüschel durch die Gleichungen

$$W_0 - \lambda W_1 = 0 \quad W_1 - \lambda W_2 = 0$$

dargestellt werden. Projicieren wir nun die Curvenpuncte auch aus einer anderen der in der Ebene $W_2 = 0$ gelegenen drei Secanten der Curve, so ist der so entstehende Ebenenbüschel zu dem Ebenenbüschel $W_1 - \lambda W_2 = 0$ in Ansehung der Ebenen, welche denselben Curvenpunct projicieren, projectivisch. Nun projicieren die Ebenen $W_1 = 0$ des einen, und $W_2 = 0$ des anderen Ebenenbüschels denselben Punct; entspricht daher der Ebene $W_2 = 0$ als Ebene des Büschels $W_1 - \lambda W_2 = 0$ im neuen Büschel die Ebene $W_3 = 0$, so wird dieser durch die Gleichung dargestellt: $W_2 - \lambda W_3 = 0$. Es stellt sich sonach die Curve als der Ort der Durchschnittspuncte der entsprechenden Ebenen der drei projectivischen Ebenenbüschel dar:

$$W_0 - \lambda W_1 = 0; \quad W_1 - \lambda W_2 = 0; \quad W_2 - \lambda W_3 = 0.$$

Das Gesetz der Reciprocität lehrt nun unmittelbar, daß der Ebenenbündel der dritten Ordnung gleichfalls durch eine Gleichung von der Form (3.), wo aber die Größen M_0, M_1, M_2, M_3 linear nach Punctcoordinaten sind, oder durch drei Gleichungen von der Form (4.) oder (5.), worin $W_0 = 0, W_1 = 0, W_2 = 0, W_3 = 0$ vier Punctgleichungen bezeichnen, dargestellt wird.

§ 72.

Fortsetzung.

Jeder Parameterwert in dem Gleichungssysteme

$$W_0 - \lambda W_1 = 0, \quad W_1 - \lambda W_2 = 0, \quad W_2 - \lambda W_3 = 0 \quad (5.)$$

bestimmt also einen Punct der Curve. Ist nun

$$W_0 - \lambda' W_1 = 0; \quad W_1 - \lambda' W_2 = 0; \quad W_2 - \lambda' W_3 = 0$$

ein zweiter Curvenpunct, so müssen sich für jede Ebene, welche durch beide Curvenpuncte hindurchgeht, sechs Constante, m, n, p , und m', n', p' , auffinden lassen, § 38, dergestalt, daß

$$\begin{aligned} & m(W_0 - \lambda W_1) + n(W_1 - \lambda W_2) + p(W_2 - \lambda W_3) \\ & \equiv m'(W_0 - \lambda' W_1) + n'(W_1 - \lambda' W_2) + p'(W_2 - \lambda' W_3). \end{aligned}$$

Diese Identität kann aber nur bestehen, wenn die sechs Constanten den Bedingungen genügen

$$\begin{aligned} m &= m'; & m\lambda - n &= m'\lambda' - n' \\ p - n\lambda &= p' - n'\lambda'; & p\lambda &= p'\lambda', \end{aligned}$$

welche sich in die eine zusammenziehen lassen:

$$(m\lambda' + n)\lambda' = -p.$$

Es stellt daher

$$\begin{aligned} & m[W_0 - \lambda W_1 - \lambda'^2(W_2 - \lambda W_3)] \\ & + n[W_1 - \lambda W_2 - \lambda'(W_2 - \lambda W_3)] = 0, \end{aligned} \quad (6.)$$

worin n und m bewegliche Größen sind, eine Ebene dar, welche durch die beiden gegebenen Puncte hindurchgeht.

Die Secante ist daher durch die beiden Gleichungen bestimmt:

$$\left. \begin{aligned} W_0 - (\lambda + \lambda') W_1 + \lambda \lambda' W_2 &= 0 \\ W_1 - (\lambda + \lambda') W_2 + \lambda \lambda' W_3 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (7.)$$

von denen sich die zweite aus (6.) für $m = 0$ und die erste für $m = 1, n = -\lambda'$ ergibt.

Läßt man nun die beiden Curvenpuncte zusammenfallen, so geht die Secante in eine Tangente über und es wird somit die Tangente im Puncte P , welcher dem Parameter λ zugehört, durch die beiden Gleichungen bestimmt, welche sich aus (7.) für $\lambda = \lambda'$ ergeben, also durch

$$\left. \begin{aligned} W_0 - 2\lambda W_1 + \lambda^2 W_2 &= 0 \\ W_1 - 2\lambda W_2 + \lambda^2 W_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.)$$

Jede Ebene, welche durch eine Tangente der Curve hindurchgelegt wird, berührt ebenfalls die Curve im Berührungspuncte der Tangente und wird deshalb eine Tangentialebene der Curve genannt. Der Gleichung derselben läßt sich somit immer die Form geben:

$$(W_0 - 2\lambda W_1 + \lambda^2 W_2) + \mu (W_1 - 2\lambda W_2 + \lambda^2 W_3) = 0,$$

wo μ einen Parameter bedeutet. Jede dieser Ebenen hat offenbar mit der Curve außer dem Berührungspuncte der Tangente, in welchem zwei der drei Schnittpuncte der Ebene mit der Curve zusammenfallen, noch einen Punct gemeinsam. Bezeichnen wir nun den Parameter dieses Punctes in (5.) mit λ_1 , so können wir aus der obigen Gleichung der Berührungsebene μ durch diesen Parameter ausdrücken. Denn es bestehen dann für die Coordinaten dieses Punctes die Gleichungen

$$W_0 + (\mu - 2\lambda) W_1 + (\lambda - 2\mu) \lambda W_2 + \mu \lambda^2 W_3 = 0,$$

woraus für μ die Gleichung folgt

$$\lambda_1^3 + (\mu - 2\lambda) \lambda_1^2 + (\lambda - 2\mu) \lambda \lambda_1 + \mu \lambda^2 = 0,$$

und hieraus ergibt sich

$$\mu = -\lambda_1.$$

Also ist die Gleichung der Ebene, welche die Curve im Puncte λ berührt und im Puncte λ_1 schneidet:

$$W_0 - (2\lambda + \lambda_1) W_1 + (\lambda + 2\lambda_1) W_2 - \lambda^2 \lambda_1 W_3 = 0.$$

Für die Ebene nun, deren Gleichung hieraus für $\lambda = \lambda_1$ hervorgeht, vereinigt sich auch der dritte Schnittpunct mit dem Berührungspuncte λ ; sie hat also mit der Curve drei zusammenfallende Puncte gemeinsam. Eine solche Ebene wird eine Osculations- oder Schmiegungeebene der Curve im Puncte λ genannt; ihre Gleichung ist:

$$W_0 - 3\lambda W_1 + 3\lambda^2 W_2 - \lambda^3 W_3 = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichung folgt unmittelbar, daß wenn wir hierin λ als einen Parameter ansehen, die sämtlichen Ebenen, welche sich aus derselben ergeben, einen Ebenenbüschel der dritten Ordnung bilden (§ 71).

Wir erhalten somit den Satz:

Die sämtlichen Osculationsebenen einer Curve der dritten Ordnung bilden einen Ebenenbüschel der dritten Ordnung.

Da die Raumcurve und der Ebenenbüschel der dritten Ordnung einander reciprok gegenüberstehen, so folgt hieraus wieder nach dem Gesetze der Reciprocität:

Die Schnittpuncte je dreier unendlich benachbarter

Ebenen eines Ebenenbüschels der dritten Ordnung bilden eine Raumcurve der dritten Ordnung.

§ 73.

Es obliegt uns nun noch den Fall zu untersuchen, in welchem die beiden collinearen Grundgebilde ungleichartig, also ein Strahlenbündel und ebenes System sind. Es läßt sich aber dieser Fall zurückführen auf die Betrachtung zweier collinearer concentrischer Strahlenbündel, indem wir das ebene System vom Mittelpuncte des Bündels aus projectieren, oder zweier collinearer in einander liegender ebener Systeme, indem wir den Strahlenbündel durch den Träger des ebenen Systems schneiden. Auf diese Weise erhalten wir aus den Sätzen über concentrische collineare Strahlenbündel oder in einander liegende collineare ebene Systeme (§ 69 und 70):

Sind ein Strahlenbündel und ein ebenes System collinear, so gehen im Allgemeinen drei Strahlen des Strahlenbündels durch ihre entsprechenden Punkte und drei Ebenen des Strahlenbündels durch ihre entsprechenden Geraden des ebenen Systems.

In jedem dieser beiden Tripel von Elementen ist wenigstens ein Element reell; die beiden anderen sind gleichzeitig reell oder imaginär und werden stets von dem reellen Elemente des anderen Tripels getragen.

§ 74.

Ü b u n g e n.

1) Sind zwei Ebenenbüschel eines Strahlenbündels projectivisch zu zwei Ebenenbüscheln eines anderen Strahlenbündels, so kann vermöge dieser beiden Paare projectivischer Ebenenbüschel jeder Geraden des einen wieder eine Gerade des anderen Strahlenbündels zugeordnet werden. Welches Gebilde constituieren nun die Strahlen, die den Strahlen eines Strahlenbüschels des anderen Strahlenbündels entsprechen? In welchem Falle ist dieses Gebilde wieder ein Strahlenbüschel und sind somit die beiden Strahlenbündel collinear zu einander?

Anl. § 54.

2) Zwei Ebenenbüschel eines Strahlenbündels sind projectivisch zu zwei Strahlenbüscheln eines anderen Strahlenbündels; man kann dann jeder Geraden des ersten Strahlenbündels, als dem Durchschnitt zweier Ebenen der beiden Ebenenbüschel, die Verbindungsebene der entsprechenden Strahlen der beiden Strahlenbüschel zuweisen. Welches Gebilde umhüllen nun die Ebenen, welche den Strahlen eines Strahlenbüschels des ersten, oder erfüllen die Geraden, welche den Ebenen eines Ebenenbüschels des zweiten Strahlenbündels entsprechen? Unter

welchen Bedingungen sind diese Gebilde einförmige Grundgebilde und somit die beiden Strahlenbündel zu einander reciprok?

3) Die (1.) und (2.) analogen Untersuchungen für zwei ebene Systeme, oder ein ebenes System und einen Strahlenbündel durchzuführen.

Anmerkung. Man nennt die in (1.), (2.) und (3.) angedeutete Verwandtschaft zwischen Grundgebilden der zweiten Stufe, bei welcher Elementen der einen Art im anderen Grundgebilde wieder Elemente desselben entsprechen, jedoch Elementen der anderen Art Gebilde des zweiten Grades zugeordnet sind, eine quadratische Verwandtschaft.

4) Sind ein Strahlenbündel und ein ebenes System reciprok und zieht man durch jede Gerade des Systems eine Ebene parallel zu seinem entsprechenden Strahl und durch jeden Punct eine Gerade parallel zu seiner entsprechenden Ebene, so umhüllen alle diese Ebenen eine Fläche der zweiten Classe, welche die unendlich ferne Ebene berührt.

5) Sind ein Strahlenbündel und ein ebenes System collinear und zieht man durch jeden Punct des letzteren eine Parallele zu seinem entsprechenden Strahle, so bildet die Gesamtheit der Ebenen, deren jede irgend zwei dieser Parallelen enthält, einen Ebenenbüschel der dritten Ordnung.

6) Sind zwei Strahlenbündel reciprok, so bilden die Strahlen des einen Strahlenbündels, welche ihren entsprechenden Ebenen im anderen Strahlenbündel parallel sind, einen Kegel; und die entsprechenden Ebenen des anderen Strahlenbündels somit einen Ebenenbüschel der zweiten Ordnung.

Anl. S. 197.

7) Sind zwei Strahlenbündel collinear, so existieren in jedem drei Ebenen, welche ihren entsprechenden Strahlen des anderen Bündels parallel sind.

8) Von den Puncten eines ebenen Systems werden auf die entsprechenden Ebenen eines zu demselben reciproken Bündels Senkrechte gefällt; zur Entstehung welches Gebildes geben diese Geraden Veranlassung?

9) Den geometrischen Ort der Ebenen eines Strahlenbündels zu suchen, welche auf ihren entsprechenden Ebenen eines collinearen Strahlenbündels senkrecht stehen.

10) Wie viele Strahlen eines Strahlenbündels stehen auf ihren entsprechenden Ebenen eines reciproken Strahlenbündels senkrecht?

11) Zwei Ecken eines Dreiecks bewegen sich in festen Geraden, während die denselben gegenüberliegenden Seiten sich um fixe Puncte drehen; welches ist der Ort der Verbindungslinie dieser Ecken?

12) Zwei Ecken eines Dreiecks bewegen sich in festen Ebenen, während jede seiner Seiten sich um einen fixen Punkt dreht; welche Curve beschreibt die dritte Ecke?

13) $(n - 1)$ Ecken eines räumlichen n -Ecks bewegen sich in festen Ebenen, während jede seiner Seiten sich um einen fixen Punkt dreht; welche Curve beschreibt die n^{te} Ecke?

$(n - 1)$ Seiten eines räumlichen Polygons drehen sich um feste Punkte, während eine Ecke der n^{ten} Seite sich in einer Geraden und alle übrigen $(n - 1)$ Ecken sich in festen Ebenen bewegen; welche Fläche erzeugt die n^{te} Seite durch ihre Bewegung?

14) Haben zwei collineare ebene Systeme, die in verschiedenen Ebenen liegen, in ihrer Schnittlinie zwei entsprechende Gerade vereinigt, so bilden die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden collinearen Systeme eine lineare Congruenz. Und umgekehrt: Eine lineare Congruenz wird von je zwei durch einen Strahl derselben gelegten Ebenen in zwei collinearen ebenen Systemen geschnitten.

15) Wie lauten die reciproken Sätze von 14?

16) In welcher Lage befinden sich zwei in einander liegende collineare ebene Systeme oder Strahlenbündel, wenn für eine Wurzel der Gleichung § 66

$$\Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho, & a_{12}, & a_{23} \\ a_{21}, & a_{22} - \varrho, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

die sämtlichen Subdeterminanten zweiten Grades der Determinante $\Delta(\varrho)$ verschwinden?

17) Lassen sich zwei projectivische ebene Systeme stets und in wievielerlei Weise perspectivisch legen?

Anl. Liegen zwei ebene Systeme perspectivisch, so ist offenbar die Schnittlinie ihrer Träger parallel zu jeder Geraden, welche in dem einen Systeme der unendlich fernen Geraden des anderen Systems entspricht, der sog. Fluchtlinie oder Gegenaxe des Systems. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß in jedem der beiden Systeme zwei Punktreihen bestehen, deren jede ihrer entsprechenden Punktreihe im anderen Systeme gleich und der Fluchtlinie ihres Systems parallel ist. Am einfachsten gelingt dieser Nachweis bei Benutzung der gewöhnlichen Coordinaten unter Anwendung von § 4, 2 und § 3, 1.

18) Zwei collineare Strahlenbündel besitzen einen entsprechenden rechtwinkligen Dreikant, d. h. es bestehen in jedem Bündel drei Ebenen, die ebenso wie ihre entsprechenden im anderen auf einander senkrecht stehen.

Anl. Wir verschieben die beiden Bündel derart, daß ihre Mittelpunkte in den Coordinatenanfangspunkt des rechtwinkligen Systems zu liegen kommen, auf welches sie bezogen werden. Es werden dann die Coordinatenebenen zu

Grundelementen der beiden Bündel angenommen, auf welche bezogen die Verwandtschaft durch die Gleichungen ausgedrückt sei

$$\begin{aligned} \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z &= 0; & k_1 x + k_2 y + k_3 z &= 0 \\ \varrho \lambda_1 &= a_{11} k_1 + a_{12} k_2 + a_{13} k_3; & \sigma k_1 &= \alpha_{11} \lambda_1 + \alpha_{21} \lambda_2 + \alpha_{31} \lambda_3 \\ \varrho \lambda_2 &= a_{21} k_1 + a_{22} k_2 + a_{23} k_3; & \sigma k_2 &= \alpha_{12} \lambda_1 + \alpha_{22} \lambda_2 + \alpha_{32} \lambda_3 \\ \varrho \lambda_3 &= a_{31} k_1 + a_{32} k_2 + a_{33} k_3; & \sigma k_3 &= \alpha_{13} \lambda_1 + \alpha_{23} \lambda_2 + \alpha_{33} \lambda_3, \end{aligned}$$

wo α_{ik} die Subdeterminante von a_{ik} in $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}$ ist.

Man stelle nun die Gleichung der Geraden auf, welche auf der Ebene $E: \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$ des ersten Bündels senkrecht steht (§ 22, 3). Als Bedingung, daß die dieser Geraden entsprechende Gerade des anderen Bündels auf der Ebene E entsprechenden ebenfalls senkrecht stehe, findet sich dann

$$\sum_i a_{i1} \lambda_i = \varrho \sum_i \alpha_{i1} \lambda_i; \quad \sum_i a_{i2} \lambda_i = \varrho \sum_i \alpha_{i2} \lambda_i; \quad \sum_i a_{i3} \lambda_i = \varrho \sum_i \alpha_{i3} \lambda_i;$$

dieses Gleichungssystem kann mittelst eines Proportionalitätsfactors ϱ ersetzt werden durch

$$\sum_i a_{i1} \lambda_i = \varrho \sum_i \alpha_{i1} \lambda_i; \quad \sum_i a_{i2} \lambda_i = \varrho \sum_i \alpha_{i2} \lambda_i; \quad \sum_i a_{i3} \lambda_i = \varrho \sum_i \alpha_{i3} \lambda_i,$$

oder

$$\lambda_1 \left(\sum_{\mu} a_{1\mu}^2 - \varrho \right) + \lambda_2 \sum_{\mu} a_{1\mu} a_{2\mu} + \lambda_3 \sum_{\mu} a_{1\mu} a_{3\mu} = 0$$

$$\lambda_1 \sum_{\mu} a_{1\mu} a_{2\mu} + \lambda_2 \left(\sum_{\mu} a_{2\mu}^2 - \varrho \right) + \lambda_3 \sum_{\mu} a_{2\mu} a_{3\mu} = 0$$

$$\lambda_1 \sum_{\mu} a_{1\mu} a_{3\mu} + \lambda_2 \sum_{\mu} a_{2\mu} a_{3\mu} + \lambda_3 \left(\sum_{\mu} a_{3\mu}^2 - \varrho \right) = 0.$$

Setzt man der Kürze halber $\sum_{\mu} a_{i\mu} a_{k\mu} = A_{ik}$, so wird ϱ durch die Gleichung bestimmt

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \varrho & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \varrho & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

wo $A_{ik} = A_{ki}$ ist. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß diese Gleichung lauter reelle Wurzeln besitzt. Denn wäre $\varrho = \xi + i\eta$, und demnach $\lambda_k = l_k + im_k$, so bestünden folgende sechs Gleichungen, welche sich aus

$$\sum_i A_{ki} l_i - l_k \xi + m_k \eta = 0, \quad \text{und} \quad \sum_i A_{ki} m_i - m_k \xi - l_k \eta = 0$$

für $k = 1, 2, 3$ ergeben. Somit wäre für irgendwelches k

$$\sum_i A_{ki} l_i m_k - \sum_i A_{ki} l_k m_k + (l_k^2 + m_k^2) \eta = 0.$$

Die Addition dieser Gleichungen für $k = 1, 2, 3$ liefert somit, wegen $A_{ik} = A_{ki}$:

$$\eta \sum_k (l_k^2 + m_k^2) = 0,$$

woraus $\eta = 0$ folgt.

17) Besitzen zwei collineare Strahlenbündel entsprechende Ebenenbüschel, die gleich sind?

Anl. Man bringe die beiden collinearen Strahlenbündel derart in concentrische Lage, daß die entsprechenden Ebenen der beiden entsprechenden rechtwinkligen Dreikante zusammenfallen.

Auf diese als Grundebenen bezogen seien die Gleichungen der beiden Bündel

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$$

$$m_1 \lambda_1 x + m_2 \lambda_2 y + m_3 \lambda_3 z = 0,$$

wo die m gegebene Constante bedeuten. Es bestimmen nun

$$\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3$$

einen Ebenenbüschel im ersten Grundgebilde. Damit irgend zwei auf einander senkrecht stehenden Ebenen dieses Ebenenbüschels im anderen Grundgebilde wieder zwei derartigen Ebenen entsprechen, müssen die α für jedes λ außer der obigen Gleichung noch der Gleichung genügen:

$$\begin{vmatrix} m_1^2 \lambda_1 & m_2^2 \lambda_2 & m_3^2 \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus dieser Bemerkung erhält man zur Bestimmung der α drei homogene Gleichungen, von denen aber zwei identisch sind.

Hiermit ist auch die Frage beantwortet.

20) Auf wie viel Arten lassen sich zwei collineare Strahlenbündel perspectivisch legen?

21) Besitzen zwei collineare Bündel gleiche entsprechende Strahlenbüschel, und wie viele?

Anl. Ergiebt sich am einfachsten aus (20.), wenn man zu jedem der beiden Strahlenbündel den concentrischen reciproken construirt, dessen jedes Element auf seinem entsprechenden Elemente im reciproken Bündel senkrecht steht.

22) Sind zwei Strahlenbündel reciprok, so besteht in jedem derselben ein rechtwinkliches Dreikant, dem im anderen ein rechtwinkliges Dreiflach entspricht.

Anl. Ergiebt sich aus 18. und Anl. zu 21. für eines der Bündel. Oder dadurch, daß der eine Bündel in den Mittelpunkt des anderen verschoben wird und Anl. zu 21 für einen der Bündel, mit Anwendung von § 69. Hieraus ergiebt sich wieder der Satz 18.

23) Wie vereinfacht sich der Satz (22.), wenn die beiden reciproken Bündel involutorisch liegen?

24) Besitzt jedes von zwei reciproken Strahlenbündeln Ebenenbüschel, die ihren entsprechenden Strahlenbüscheln im anderen Grundgebilde gleich sind, und wie viele?

Anl. Zu 21 auf eines der Bündel angewandt und 19.

25) Wie oft schneidet in einem involutorischen Strahlenbündel ein Ebenenbüschel den Träger des entsprechenden Strahlenbüschels in einem demselben projectivisch gleichen Strahlenbüschel?

Anl. Man beziehe die beiden Grundgebilde auf das mit seinem entsprechenden rechtwinkligen Dreikant zusammenfallende Dreiflach (23.), welches man zum rechtwinkligen Coordinatensystem und dessen Ebenen man zu den Grundebenen der beiden reciproken Bündel annehme. Man stelle nun die Gleichung einer Ebene des einen Bündels, welche auf einer angenommenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in einem supponierten Strahle $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ senkrecht steht. Die Gleichung, welche die Bedingung ausdrückt, daß die diesen Ebenen entsprechenden Strahlen ebenfalls auf einander senkrecht stehen, liefert dann aus der Variabilität des $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Gleichungen, welche α_1, α_2 und α_3 bestimmen.

26) Ist von den drei ebenen Systemen Σ_1 , Σ_2 und Σ_3 jedes zu den anderen perspectivisch, so liegen ihre drei Collineationscentra in einer Geraden. Wie lautet der reciproke Satz?

27) Die Bedingung aufzusuchen, unter welcher die Gleichung

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 \\ + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0$$

eine Kegelfläche darstellt.

Anl. Sind $E_1 + \lambda E_2 = 0$ und $E_1' + m\lambda E_2' = 0$ die Gleichungen zweier projectivischer Ebenenbüschel, welche die Kegelfläche erzeugen, und ist

$$E_1 \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4$$

$$E_2 \equiv v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4$$

$$E_1' \equiv u_1' x_1 + u_2' x_2 + u_3' x_3 + u_4' x_4$$

$$E_2' \equiv v_1' x_1 + v_2' x_2 + v_3' x_3 + v_4' x_4,$$

so müssen die Gleichungen zusammen bestehen

$$a_{11} = m(u_1 v_1' + u_1' v_1) - (v_1 u_1' + u_1' v_1)$$

$$a_{12} = m(u_1 v_2' + u_2 v_1') - (v_1 u_2' + v_2 u_1')$$

$$a_{13} = m(u_1 v_3' + u_3 v_1') - (v_1 u_3' + v_3 u_1')$$

$$a_{14} = m(u_1 v_4' + u_4 v_1') - (v_1 u_4' + u_1' v_4)$$

u. s. f.

Bezeichnen nun $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die Coordinaten des Durchschnittspunctes der vier Ebenen $E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = 0, E_4 = 0$, so folgt aus den oben stehenden vier Gleichungen

$$a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 + a_{14}\xi_4 = 0.$$

Aus jeder der drei übrigen Gruppen von vier Gleichungen des obigen Systems, in welcher die Constanten a denselben vorderen Index besitzen, folgt eine dieser analoge Gleichung. Damit nun diese vier nach $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ homogenen Gleichungen zusammen bestehen können, muß

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

28) Unter welcher Bedingung stellt die nach x_1, x_2, x_3, x_4 homogene quadratische Gleichung eine Regelfläche dar?

Elftes Capitel.

Collineation und Reciprocität räumlicher Systeme.

§ 75.

In ganz derselben Weise, wie wir in den vorhergehenden Abschnitten die Elemente zweier Grundgebilde der ersten oder zweiten Stufe in Beziehung zu einander setzten, können wir auch die Elemente zweier räumlichen Systeme einander zuordnen, indem wir deren Coordinaten durch Gleichungen mit einander verknüpfen. Bei der größeren Zahl Elemente, die das räumliche System besitzt, wird sich zwischen zwei räumlichen Systemen auch eine größere Mannigfaltigkeit von Verwandtschaften aufstellen lassen, als bei den Grundgebilden der zweiten Stufe. In der That können ja auch die Gleichungen, welche die Beziehung zwischen den Elementen der beiden räumlichen Systeme ausdrücken, durch die Verbindung aller drei Coordinatenarten, der Punct-, Ebenen- und Liniencoordinaten gebildet werden. Doch wurden von der Menge Verwandtschaften, die aus diesem Grundgedanken fließen, bis jetzt zunächst nur solche berücksichtigt, in deren Verwandtschaftsgleichungen allein Punct- und Ebenencoordinaten der beiden räumlichen Systemen verbunden sind. Hier wollen wir nun, ebenso wie in den vorhergehenden Fällen, bloß jene Zuordnung der Elemente erörtern, bei welcher die Elemente der beiden Systeme einander eindeutig entsprechen. Bei dieser Zuordnung müssen wir berücksichtigen, daß von den Elementen eines räumlichen Systems: Punct, Ebene und Gerade, die beiden ersten Träger von Grundgebilden der zweiten und die Gerade der Träger eines Grundgebildes der ersten Stufe ist. Soll daher die Zuordnung derart sein, daß jedem Elemente des einen Systems, das von einem anderen A getragen wird, im anderen Systeme ein Element entspricht, das von dem A entsprechenden getragen wird, so können nur die Träger von Grundgebilden der zweiten oder ersten Stufe einander als entsprechende zugewiesen werden.

Wir werden hiernach zwei derartige eindeutige Verwandtschaften zu unterscheiden haben. Bei beiden entspricht einer Geraden des einen Systems im anderen Systeme wieder eine Gerade; aber bei der einen sind von den Trägern der Grundgebilde der zweiten Stufe die gleichartigen, bei der anderen die ungleichartigen einander als entsprechende Elemente der beiden räumlichen Systeme zuge-

wiesen. Die erste Art der Verwandtschaft wird die collineare, die zweite die reciproke oder duale genannt.

Bei der ersten entspricht also jedem Punkte des einen Systems wieder ein Punkt des anderen und jeder Ebene des einen eine Ebene im anderen; bei der zweiten, der reciproken Verwandtschaft, entspricht jedem Punkte des einen Systems eine Ebene des anderen.

Es müssen also bei der collinearen Verwandtschaft die Coordinaten je zweier Punkte derart durch lineare Gleichungen mit einander verknüpft sein, daß jede lineare Verbindung der Coordinaten eines Punktes des einen Systems vermöge dieser Gleichungen wieder in eine lineare Verbindung zwischen den Coordinaten des entsprechenden Punktes übergeht. Denn nur dann bilden die Punkte, welche den Punkten einer Ebene des einen Systems entsprechen, im anderen Systeme wieder eine, die entsprechende, Ebene. Sind also etwa x_1, x_2, x_3, x_4 die Coordinaten des einen, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die des entsprechenden Punktes, so muß hiernach jedes der Verhältnisse irgend dreier der Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 zur vierten: erstens einem Quotienten zweier nach $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ linearen Ausdrücke gleich sein, und zweitens müssen alle diese Quotienten denselben Nenner haben. Vermöge eines Proportionalitätsfactors ϱ können wir somit diese drei Gleichungen durch die vier ersetzen

$$\left. \begin{aligned} \varrho x_1 &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 + a_{14}\xi_4 \\ \varrho x_2 &= a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 + a_{24}\xi_4 \\ \varrho x_3 &= a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 + a_{34}\xi_4 \\ \varrho x_4 &= a_{41}\xi_1 + a_{42}\xi_2 + a_{43}\xi_3 + a_{44}\xi_4 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{I.})$$

welche die Verwandtschaftsgleichungen der beiden collinearen Systeme genannt werden sollen. Mittelst derselben geht die Gleichung der Ebene des ersten Systems

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

über in

$$\begin{aligned} u_1 \sum_i a_{1i}\xi_i + u_2 \sum_i a_{2i}\xi_i + u_3 \sum_i a_{3i}\xi_i + u_4 \sum_i a_{4i}\xi_i \\ = \sum_{ik} a_{ki} u_k \xi_i = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.})$$

welches somit die Gleichung der entsprechenden Ebene ist. Bezeichnen wir ihre Coordinaten mit u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 und mit σ einen Proportionalitätsfactor, so hängen also die Coordinaten je zweier entsprechender Ebenen der beiden Systeme durch die Gleichungen zusammen

$$\left. \begin{aligned} \sigma u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + a_{41}u_4 \\ \sigma u'_2 &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + a_{42}u_4 \\ \sigma u'_3 &= a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 + a_{43}u_4 \\ \sigma u'_4 &= a_{14}u_1 + a_{24}u_2 + a_{34}u_3 + a_{44}u_4 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.})$$

Aus den Gleichungen (I.) und (II.) erhalten wir wieder, wenn mit A_{ik} die Subdeterminante des Elementes a_{ik} in $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ bezeichnet wird, vorausgesetzt, daß diese Determinante nicht verschwindet,

$$\left. \begin{aligned} \varrho \xi_1 &= A_{11} x_1 + A_{21} x_2 + A_{31} x_3 + A_{41} x_4 \\ \varrho \xi_2 &= A_{12} x_1 + A_{22} x_2 + A_{32} x_3 + A_{42} x_4 \\ \varrho \xi_3 &= A_{13} x_1 + A_{23} x_2 + A_{33} x_3 + A_{43} x_4 \\ \varrho \xi_4 &= A_{14} x_1 + A_{24} x_2 + A_{34} x_3 + A_{44} x_4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.})$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma u_1 &= A_{11} u'_1 + A_{12} u'_2 + A_{13} u'_3 + A_{14} u'_4 \\ \sigma u_2 &= A_{21} u'_1 + A_{22} u'_2 + A_{23} u'_3 + A_{24} u'_4 \\ \sigma u_3 &= A_{31} u'_1 + A_{32} u'_2 + A_{33} u'_3 + A_{34} u'_4 \\ \sigma u_4 &= A_{41} u'_1 + A_{42} u'_2 + A_{43} u'_3 + A_{44} u'_4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.})$$

Entspricht dem Punkte x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 , oder der Ebene v_1, v_2, v_3, v_4 im anderen Systeme resp. der Punkt $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4$ oder die Ebene v'_1, v'_2, v'_3, v'_4 , so zeigen die obigen Gleichungen unmittelbar, daß dem Punkte: $x_1 + \mu x'_1, x_2 + \mu x'_2, x_3 + \mu x'_3, x_4 + \mu x'_4$ der Punkt $\xi_1 + \mu m \xi'_1, \xi_2 + \mu m \xi'_2, \xi_3 + \mu m \xi'_3, \xi_4 + \mu m \xi'_4$, der Ebene:

$$u_1 + \mu n v_1, u_2 + \mu n v_2, u_3 + \mu n v_3, u_4 + \mu n v_4$$

die Ebene $u'_1 + \mu n v'_1, u'_2 + \mu n v'_2, u'_3 + \mu n v'_3, u'_4 + \mu n v'_4$, wo m und n von μ unabhängige constante Größen bezeichnen.

Somit entsprechen den Elementen eines einförmigen Grundgebildes des einen Systems wieder die Elemente eines einförmigen Grundgebildes im anderen System, und zwar sind, wegen des eindeutigen Entsprechens der Elemente der beiden Systeme, wie auch die obigen Ausdrücke lehren, diese einförmigen Grundgebilde projectivisch in Ansehung der entsprechenden Elemente der beiden räumlichen Systeme.

Es ist also hiernach jeder Geraden des einen Systems wieder eine Gerade des anderen Systems zugewiesen.

2) Bei der reciproken Verwandtschaft soll jedem Punkte des einen Systems eine Ebene des anderen entsprechen. Es müssen also die Punctkoordinaten des einen und die Ebenencoordinaten des anderen Systems derart durch lineare Gleichungen mit einander verknüpft sein, daß jede lineare Verbindung der Punctkoordinaten des ersten Systems vermöge dieser Relationen wieder eine lineare Verbindung der Ebenencoordinaten des anderen Systems nach sich zieht, und umgekehrt. Sind also x_1, x_2, x_3, x_4 die Coordinaten eines Punctes des ersten und u_1, u_2, u_3, u_4 die Coordinaten der entsprechenden Ebene des zweiten Systems, so muß hiernach jedes der Verhältnisse dreier der Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 zur vierten gleich sein einem Quotienten zweier nach den u_1, u_2, u_3, u_4 linearen Ausdrücke, und diese Quo-

tienten müssen überdies denselben Nenner besitzen. Mittels eines Proportionalitätsfactors ϱ können wir diese drei Verhältnisse durch die vier Gleichungen ausdrücken

$$\left. \begin{aligned} \varrho x_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + a_{14}u_4 \\ \varrho x_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + a_{24}u_4 \\ \varrho x_3 &= a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 + a_{34}u_4 \\ \varrho x_4 &= a_{41}u_1 + a_{42}u_2 + a_{43}u_3 + a_{44}u_4 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{I.})$$

Bezeichnen wir mit A_{ik} die Subdeterminante des Elementes a_{ik} in $\Sigma \pm a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$, so ergibt sich aus diesen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma u_1 &= A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + A_{31}x_3 + A_{41}x_4 \\ \sigma u_2 &= A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + A_{32}x_3 + A_{42}x_4 \\ \sigma u_3 &= A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3 + A_{43}x_4 \\ \sigma u_4 &= A_{14}x_1 + A_{24}x_2 + A_{34}x_3 + A_{44}x_4 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{II.})$$

Es sind also diese Ausdrücke wirklich so beschaffen, daß jede lineare Verbindung von x_1, x_2, x_3, x_4 eine nach u_1, u_2, u_3, u_4 lineare Verbindung und umgekehrt nach sich zieht. Aus diesen Gleichungen ergibt sich auch der Zusammenhang zwischen den Ebenencoordinaten des ersten und den Punctcoordinaten des zweiten Systems.

Sind v_1, v_2, v_3, v_4 die Coordinaten einer Ebene des ersten Systems, so ergibt sich mittelst der obigen Relationen:

$$\begin{aligned} &v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 \\ &\equiv u_1 \sum_i a_{i1}v_i + u_2 \sum_i a_{i2}v_i + u_3 \sum_i a_{i3}v_i + u_4 \sum_i a_{i4}v_i = 0. \end{aligned}$$

Somit bestimmt die Ebene v_1, v_2, v_3, v_4 im anderen Systeme den Punct $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, dessen Coordinaten durch die Ausdrücke dargestellt werden:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \xi_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + a_{41}v_4 \\ \varrho \xi_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + a_{42}v_4 \\ \varrho \xi_3 &= a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3 + a_{43}v_4 \\ \varrho \xi_4 &= a_{14}v_1 + a_{24}v_2 + a_{34}v_3 + a_{44}v_4 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.})$$

Hieraus folgt wieder

$$\left. \begin{aligned} \sigma v_1 &= A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 + A_{14}\xi_4 \\ \sigma v_2 &= A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 + A_{24}\xi_4 \\ \sigma v_3 &= A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 + A_{34}\xi_4 \\ \sigma v_4 &= A_{41}\xi_1 + A_{42}\xi_2 + A_{43}\xi_3 + A_{44}\xi_4 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{IV.})$$

für die Coordinaten der Ebene des ersten Systems, welche dem Puncte $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ des zweiten entspricht.

Entspricht den Puncten x_1, x_2, x_3, x_4 und x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 oder den Ebenen v_1, v_2, v_3, v_4 und v'_1, v'_2, v'_3, v'_4 des ersten Systems im zweiten resp. die Ebenen u_1, u_2, u_3, u_4 und u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 oder die Puncte $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ und $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4$, so entspricht dem Puncte $x_1 + \mu x'_1, x_2 + \mu x'_2, x_3 + \mu x'_3, x_4 + \mu x'_4$ oder der Ebene $v_1 + \mu v'_1, v_2 + \mu v'_2, v_3 + \mu v'_3, v_4 + \mu v'_4$ bezüglich die Ebene $u_1 + \mu m u'_1, u_2 + \mu m u'_2, u_3 + \mu m u'_3, u_4 + \mu m u'_4$ und der Punct $\xi_1 + \mu n \xi'_1, \xi_2 + \mu n \xi'_2, \xi_3 + \mu n \xi'_3, \xi_4 + \mu n \xi'_4$, wo m und n von μ unabhängige constante Gröfsen sind.

Somit entsprechen den Elementen eines einförmigen Grundgebildes des einen Systems wieder die Elemente eines einförmigen Grundgebildes im anderen Systeme, und zwar sind die beiden Grundgebilde projectivisch in Ansehung der entsprechenden Elemente der beiden räumlichen Systeme. Hiernach ist jeder Geraden des einen Systems wieder eine Gerade des anderen Systems zugewiesen.

3) Aus dem eindeutigen Entsprechen der Elemente zweier collinearen oder reciproken räumlichen Systeme folgt nicht nur, wie schon früher bemerkt wurde, daß den Elementen eines einförmigen Grundgebildes des einen Systems wieder die Elemente eines einförmigen Grundgebildes im anderen System entsprechen, sondern auch:

In zwei collinearen oder reciproken räumlichen Systemen entsprechen den Elementen eines Grundgebildes der zweiten Stufe des einen Systems wieder die Elemente eines Grundgebildes der zweiten Stufe, und diese beiden Grundgebilde sind in Ansehung der entsprechenden Elemente der beiden räumlichen Systeme im Falle der Collineation der letzteren: collinear, im Falle der Reciprocität: reciprok.

Da die Verwandtschaftsgleichungen sowohl der Collineation als auch der Reciprocität 16 Constante enthalten, so ist die Beziehung der beiden Systeme gegeben, wenn fünfzehn von einander unabhängige Gleichungen zwischen denselben aufgestellt werden können. Nun liefert aber von den Elementen Punct und Ebene jedes Paar entsprechender Elemente drei nach diesen Constanten homogene Gleichungen. Somit:

Um zwei Systeme reciprok auf einander zu beziehen, können wir jedem von fünf Elementen, Punct oder Ebene, des einen Systems, von denen keine vier denselben Träger besitzen, ein ungleichartiges von fünf derartigen Elementen des anderen als entsprechendes Element zuweisen, wodurch dann jedem Elemente des einen ein un-

gleichartiges Element des anderen Systems als entsprechendes zugeordnet ist.

Um zwei Systeme collinear auf einander zu beziehen, können wir jedem von fünf unabhängigen Elementen, Punct oder Ebene, des einen Systems ein *gleichartiges* von fünf unabhängigen Elementen des anderen als entsprechendes Element zuweisen, wodurch dann jedem Elemente des einen ein gleichartiges Element des anderen Systems als entsprechendes zugeordnet ist.

Aus der Definition der collinearen und reciproken Systeme folgt:

Sind zwei räumliche Systeme einem dritten collinear oder reciprok, so sind sie unter einander collinear.

Denn durch die Beziehung zu diesem dritten Systeme ist jedem Elemente des einen Systems ein gleichartiges des anderen zugewiesen, nämlich die beiden, welche demselben Elemente des dritten Systems entsprechen.

Ist von zwei räumlichen Systemen das eine zu einem dritten collinear, das andere zu demselben reciprok, so sind sie zu einander reciprok.

Denn durch dieses dritte System sind je zwei Elemente der beiden Systeme einander zugeordnet, welche demselben Elemente des dritten Systems entsprechen. Somit ist jedem Puncte des einen der beiden Systeme eine Ebene des anderen zugewiesen, also sind die beiden Systeme reciprok.

§ 76.

Gleichungen in Punctcoordinaten.

Die Verwandtschaften der Collineation und Reciprocität führen gegebene Gebilde, Curven und Flächen in andere über, wodurch es oft möglich wird, aus den bekannten Eigenschaften der einen neue Eigenschaften der anderen zu erschließen. Über diese Verwandlung gegebener Gebilde in collineare und reciproke bestehen mehrere allgemeine Sätze, deren Darlegung wir jedoch einige Bemerkungen über Curven und Flächen vorausschicken müssen.

Im Laufe unserer Entwicklungen ergaben sich sowohl Gleichungen des ersten als zweiten Grades in Punctcoordinaten. Die des ersten Grades stellten stets eine Ebene, die des zweiten Grades verschiedene Flächen dar, welche, wegen des Grades ihrer Gleichung, unter dem Namen Flächen der zweiten Ordnung zusammengefaßt wurden. Im Allgemeinen wird immer eine einzige Gleichung in Punctcoordinaten eine Fläche darstellen.

Ziehen wir von irgend einer Ecke des Fundamental-Tetraeders

einen Strahl, so werden auf demselben eine Anzahl von Punkten liegen, deren Coordinaten der vorgelegten Gleichung in Punctcoordinaten genügen. Wir erhalten diese Coordinaten, indem wir aus den beiden Gleichungen des Strahls und der Gleichung in Punctcoordinaten zwei der drei Verhältnisse zwischen den vier homogenen Coordinaten eliminieren, woraus eine einzige Gleichung zur Bestimmung des dritten Verhältnisses resultiert. Auf jedem Strahle, den wir durch die Tetraederecke ziehen, können wir auf diese Weise eine Anzahl von Puncten bestimmen, deren Coordinaten der Gleichung in Punctcoordinaten genügen, und die Gesamtheit derselben bildet dann die Fläche, welche die geometrische Darstellung der gegebenen Gleichung ist.

Die Flächen werden, analog den ebenen Curven, nach dem Grade ihrer Gleichung eingeteilt, durch welche sie dargestellt werden. Eine Gleichung n^{ten} Grades in Punctcoordinaten repräsentiert eine Fläche n^{ter} Ordnung. Dieselbe wird im Allgemeinen von einer Geraden in n Puncten und einer Ebene in einer Curve der n^{ten} Ordnung geschnitten.

Da die Summe der Exponenten in jedem Gliede der homogenen Gleichung der Fläche n beträgt, so ist die Endgleichung, welche zur Bestimmung eines der drei Verhältnisse der Coordinaten des Schnittpunctes der Geraden mit der Fläche sich ergibt, ebenfalls nach den beiden Gliedern des Verhältnisses homogen vom n^{ten} Grade. Hieraus folgt aber auch die Behauptung am Schlusse des obigen Satzes, denn hiernach wird die Schnittcurve der Fläche mit einer Ebene, von jeder in dieser Ebene gelegenen Geraden in höchstens n Puncten geschnitten.

II. Ein System zweier simultanen Gleichungen in Punctcoordinaten stellt im Allgemeinen eine Curve im Raume dar; die Anzahl der Puncte, welche dieselbe im Allgemeinen mit einer Ebene gemein hat, bestimmt ihre Ordnung; jene ihrer Berührungsebenen, welche durch eine beliebige Gerade hindurchgehen, ihre Classe.

So stellte das System zweier linearen Gleichungen eine Gerade, das System der Gleichungen zweier Regelflächen, die einen Strahl gemeinsam haben, eine Raumcurve der dritten Ordnung dar. Es liegen nämlich alle Puncte, deren Coordinaten einer der beiden Gleichungen allein genügen, in einer Fläche; somit gehören die Puncte, deren Coordinaten beide Gleichungen zugleich befriedigen, jeder der beiden Flächen an, d. h. ihre Gesamtheit bildet die Durchschnittslinie dieser Flächen.

Eine Gerade wird im Allgemeinen keine Punkte besitzen, deren

Coordinaten gleichzeitig den Gleichungen der beiden Flächen genügen, da hierzu erforderlich ist, daß die Resultante der vier homogenen Gleichungen verschwindet. Jede Ebene jedoch besitzt im Allgemeinen eine endliche Anzahl Puncte, deren Coordinaten den Gleichungen der beiden Flächen genügen. Denn dieselben sind die simultanen Wurzelsysteme dreier homogenen Gleichungen zwischen den vier Punctcoordinaten. Diese Puncte sind die Durchschnittspuncte der beiden Curven, welche von den beiden Flächen in der Ebene ausgeschnitten werden. Ist daher die eine Fläche von der m^{ten} , die andere von der n^{ten} Ordnung, so schneiden sich diese beiden Curven in mn Punkten, und somit ist die Raumcurve von der $(mn)^{\text{ten}}$ Ordnung. Zwei Regelflächen schneiden sich hiernach im Allgemeinen in einer Curve der vierten Ordnung. Haben sie aber einen Strahl gemeinsam, so ist dieser ein Teil ihrer Durchschnittscurve und der übrige Teil derselben somit eine Curve der dritten Ordnung, wie wir fanden.

Verbinden wir irgend einen Punct O einer Raumcurve mit irgend einem Puncte X derselben und bewegt sich X auf der Curve fort, so beschreibt die Gerade OX eine Kegelfläche, deren Mittelpunkt O ist und die also die Curve aus O projiciert. Nähert sich X dem O , so nähert sich die Gerade OX einer festen Geraden, mit der sie schließlichs zusammenfällt, wenn X sich mit O vereinigt. Diese Gerade, die also als die Verbindungslinie des Punctes O mit seinem unendlich benachbarten erscheint, wird die Tangente der Curve im Puncte O genannt; jede durch eine Tangente gehende Ebene wird eine Berührungsebene der Curve genannt. Die Berührungsebene, welche durch eine bestimmte Tangente und einen Punct X der Curve gelegt wird, beschreibt einen die Curve projicierenden Ebenenbüschel, wenn sich der Punct auf der Curve fortbewegt. Nähert sich X mehr und mehr dem Berührungspuncte der Tangente, so nähert sich die Ebene immer mehr einer festen Ebene, mit der sie schließlichs zusammenfällt, wenn X mit dem Berührungspuncte der Tangente zusammenfällt. Diese Ebene erscheint also als die Verbindungsebene von drei Puncten der Curve, die einander unbegrenzt sich genähert haben; sie wird die Schmiegungs-, Osculations- oder Krümmungsebene der Curve in dem betreffenden Puncte genannt. Offenbar ist auch umgekehrt die Schnittlinie zweier einander sich unbegrenzt nähernder Schmiegungebenen der Curve eine Tangente derselben, und der Schnittpunct dreier solcher Ebenen oder zweier sich unbegrenzt nähernder Tangenten ein Punct der Curve. Die sämtlichen Tangenten der Curve bilden einen sogenannten Strahlenbüschel, welcher die Curve einhüllt, und die sämtlichen Schmiegungebenen einen Ebenenbüschel, welcher der Curve sich anschmiegt

oder sie umhüllt. Der Ort der Tangenten einer Curve wird eine abwickelbare Fläche oder eine Developpable genannt, die Tangenten selbst die Generatrixen der abwickelbaren Fläche. Sind P, P', P'' drei unendlich benachbarte Punkte der Curve, so heißt die Schmiegungeebene $PP'P''$ der Curve im Punkte P die Tangentialebene der Developpablen längs der Generatrix PP' . Sie enthält zwei unmittelbar auf einander folgende Generatrixen PP' und PP'' , so daß jede in der Ebene gezogene Gerade Tangente der abwickelbaren Fläche in einem Punkte der Generatrix PP' ist. Umgekehrt liegt also auch jede Generatrix der Developpablen in zwei unmittelbar auf einander folgenden Schmiegungeebenen der Curve, weshalb die abwickelbare Fläche auch die Enveloppe der Schmiegungeebenen der Curve genannt wird.

Diese Erläuterungen führen nun unmittelbar zum Begriff der Tangentialebene einer Fläche in einem bestimmten Punkte derselben. Es seien durch den Punkt P der Fläche alle möglichen Curven auf derselben gezogen und an eine derselben eine Tangente p im Punkte P gelegt. Verbinden wir nun irgend einen Punkt X dieser Curve mit p durch eine Ebene, so wird jede der anderen Curven ebenfalls von der Ebene in einem Punkte geschnitten, die resp. mit $X', X'' \dots$ bezeichnet werden mögen. Bewegt sich nun X auf seiner Curve, so geschieht das Gleiche mit $X', X'' \dots$. Nähert sich X mehr und mehr dem Punkte P , so nähern sich die Geraden PX, PX', PX'' mehr und mehr den Tangenten an ihre Curve im Punkte P und die Ebene pP nähert sich hierbei immer mehr einer bestimmten Ebene, mit der sie schließlich zusammenfällt, wenn einer der Punkte $X', X'' \dots$ sich mit P vereinigt. Somit liegen alle Tangenten, welche im Punkte einer Fläche an sämtliche Curven, die durch diesen Punkt auf der Fläche gezogen sind, gelegt werden, in einer Ebene. Diese Ebene wird die Berührungsebene an die Fläche in jenem Punkte genannt. Da dieselbe als die Verbindungsebene zweier Tangenten erscheint, so kann sie auch als die Ebene definiert werden, welche im Berührungspunkte mit der Fläche drei zusammenfallende Punkte gemein hat.

III. Ein System dreier Gleichungen in Punctcoordinaten bestimmt im Allgemeinen offenbar nur eine endliche Zahl von Punkten, da sie nur eine endliche Anzahl gemeinsamer Lösungen besitzen.

§ 77.

Gleichungen in Ebenencoordinaten.

Es erübrigt uns nun noch, die analogen Erörterungen für Gleichungen in Ebenencoordinaten vorzunehmen. Dieselben dürften sich

am anschaulichsten und klarsten gestalten, wenn wir mit den vorzustellenden Gebilden die reciproken in die Betrachtung hineinziehen.

I. Wir beginnen wieder mit dem Falle, daß eine einzige Gleichung $f(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ in Ebenencoordinaten gegeben sei. Denken wir uns die Ebenen, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen, als in einem räumlichen Systeme Σ gelegen und dieses reciprok auf ein anderes Σ' bezogen, so wird jeder dieser Ebenen ein Punct in Σ' entsprechen. Die Coordinaten jedes dieser Puncte werden einer bestimmten Gleichung in Punctcoordinaten $F'(x_1, x_2, x_3, x_4)$ genügen, die wir erhalten, indem wir in $f(u_1, u_2, u_3, u_4)$ die u vermöge der Verwandtschaftsgleichungen eliminieren. Die Gesamtheit der Puncte, welche in Σ' den Ebenen $f(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ entsprechen, bilden somit eine Fläche: $F'(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. Da jedem Puncte P der Fläche $F' = 0$ eine Ebene E von $f = 0$ entspricht, so entspricht der Berührungsebene E' in P' an F' ein Punct P in Σ . Diese Puncte folgen nun continuierlich auf einander, da die Berührungsebenen an die Puncte der Fläche $F' = 0$ continuierlich auf einander folgen, also bilden sie selbst wieder eine Fläche: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. Jeder Punct derselben kann aber als der Durchschnittspunct dreier unmittelbar benachbarter Ebenen von $f(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ aufgefaßt werden, da die Berührungsebene E' in P' an F' als die Verbindungsebene dreier unmittelbar benachbarter Puncte der Fläche $F' = 0$ erscheint. Somit berühren die Ebenen $f(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ oder umhüllen die Fläche $F = 0$. Wir haben also:

Die Ebenen, deren Coordinaten einer Gleichung genügen, berühren oder umhüllen eine bestimmte Fläche. Ist die Gleichung in den Ebenencoordinaten vom n^{ten} Grade, so wird die Fläche von der n^{ten} Classe genannt. Durch jede Gerade des Raumes gehen dann im Allgemeinen n Berührungsebenen an die Fläche n^{ter} Classe, und in jedem Puncte bilden sie einen Kegel der n^{ten} Classe.

Die Ebenen, deren Coordinaten der gegebenen Gleichung genügen und durch eine bestimmte Gerade gehen, erhalten wir, indem wir das System der drei homogenen Gleichungen, von denen zwei die beiden Gleichungen der Geraden und die dritte die gegebene Gleichung in Ebenencoordinaten ist, auflösen. Die Resultante aus diesen drei Gleichungen ist nun homogen nach zweien der Ebenencoordinaten vom n^{ten} Grade. Die Ebenen, deren Coordinaten der gegebenen Gleichung genügen und gleichzeitig durch einen gegebenen Punct gehen, umhüllen offenbar ebenfalls eine Fläche, welche aus den Durchschnittslinien je zweier nächst benachbarter dieser Ebenen gebildet wird. Sie ist somit eine sog. geradlinige Fläche, deren alle Geraden

sich in einem Punkte schneiden. Eine derartige geradlinige Fläche wird eine Kegelfläche und jener Punkt die Spitze derselben genannt. Da durch eine Gerade, welche durch die Spitze dieses Kegels gezogen wird, im Allgemeinen nur n der Ebenen gehen, welche den Kegel umhüllen, so wird er von der n^{ten} Classe genannt.

II. Es sei das System zweier Gleichungen in Ebenencoordinaten gegeben: $f_1(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ und $f_2(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$. Jede derselben stellt die Umhüllende einer Fläche dar und somit das System die gemeinsamen Ebenen der beiden Umhüllenden. Wie die Betrachtung des reciproken Gebildes sofort zeigt, umhüllen diese gemeinsamen Ebenen der beiden Umhüllenden eine abwickelbare Fläche. Betrachten wir nämlich $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ als Gebilde eines räumlichen Systems Σ und construieren wir zu demselben ein reciprokes Σ' , so entspricht jeder Ebene des einen Systems ein Punkt des anderen, jeder Geraden des einen wieder eine Gerade im anderen Systeme dergestalt, daß bei vereinigter Lage irgend zweier Elemente des einen Systems auch die entsprechenden Elemente im anderen Systeme vereinigt sind; jeder der Umhüllenden $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ entspricht im anderen System eine Fläche bezüglich $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$. Den gemeinsamen Ebenen der beiden Umhüllenden entsprechen somit die gemeinsamen Punkte der beiden Flächen $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$, welche eine Raumcurve bilden. Jeder Schmiegungeebene derselben, als der Vereinigungsebene dreier unmittelbar auf einander folgender Punkte der Curve, entspricht der Durchschnittspunkt dreier unmittelbar auf einander folgender Ebenen der gemeinsamen Umhüllenden. Diese Durchschnittspunkte folgen continuierlich auf einander, da die Schmiegungeebenen der Raumcurve continuierlich auf einander folgen, und sie bilden wie diese eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit: somit constituieren sie ebenfalls eine Raumcurve. Die gemeinsamen Ebenen der beiden Umhüllenden sind offenbar die Schmiegungeebenen dieser Curve, der sog. Cuspidalcurve der Developpablen, da jeder Punkt derselben als der Durchschnittspunkt dreier nächst benachbarter jener Ebenen sich ergab. Hiermit ist die obige Behauptung bewiesen:

Das System zweier simultanen Gleichungen in Ebenencoordinaten stellt im Allgemeinen eine abwickelbare Fläche dar. Die Anzahl der Berührungsebenen derselben, welche im Allgemeinen durch einen Punkt gehen, bestimmt ihre Classe. Die Ordnung derselben ist gleich der Classe ihrer Cuspidalcurve.

Ist die eine der beiden Gleichungen vom m^{ten} , die andere vom n^{ten} Grade, so gehen durch einen Punkt im Allgemeinen (mn) Berührungsebenen der Developpablen, sie ist also von der mn^{ten} Classe.

Jede Kegelfläche ist hiernach eine Developpable, da sie durch ein System zweier Gleichungen in Ebenencoordinaten, von denen die eine vom ersten Grade ist, dargestellt wird. Eine Gerade ist, als die Curve einer Developpablen erster Classe, des Ebenenbüschels, von dem sie umhüllt wird, anzusehen. Zwei Gleichungen vom zweiten Grade in Ebenencoordinaten bestimmen eine Developpable der vierten Classe. Stellt jede der beiden Gleichungen eine Regelfläche dar und haben die beiden Regelflächen einen Strahl gemeinsam, so zerfällt offenbar die Developpable in den Ebenenbüschel, der den gemeinsamen Strahl umhüllt und in eine abwickelbare Fläche der dritten Classe. Diese letztere wieder umhüllt, wie wir sahen, eine Raumcurve dritter Ordnung, welche also ihre Cuspidalcurve ist.

III. Das System dreier Gleichungen in Ebenencoordinaten bestimmt im Allgemeinen eine endliche Anzahl von Ebenen. Denn im Allgemeinen besitzt ein System dreier homogenen Gleichungen mit vier Unbekannten bloß eine endliche Zahl gemeinsamer Lösungen.

§ 78.

Curven und Flächen in collinearen und reciproken Systemen.

Nach diesen Auseinandersetzungen können wir nunmehr mit Leichtigkeit die Beziehungen erörtern, welche zwischen entsprechenden Gebilden in collinearen und reciproken Systemen bestehen.

Sind die beiden Systeme collinear, so sind die Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punctes des einen Systems mit den Coordinaten des entsprechenden Punctes des anderen Systems $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ durch vier Gleichungen von der Form

$$\varrho x_i = \sum_k a_{ik} \xi_k \quad \text{oder} \quad \varrho \xi_i = \sum_k A_{ik} x_k,$$

wo a_{ik} dieselbe Bedeutung wie früher (§ 75) besitzt, verbunden; die Coordinaten zweier entsprechender Ebenen durch die Relationen

$$\sigma u_i = \sum_k A_{ik} u'_k \quad \text{oder} \quad \sigma u'_i = \sum_k a_{ki} u_k.$$

Jede Gleichung in Punctcoordinaten oder Ebenencoordinaten wird vermöge dieser Relationen wieder in eine Gleichung in den nämlichen Coordinaten und von demselben Grade übergeführt. Somit:

Jeder Fläche oder Curve entspricht im collinearen Systeme eine Fläche oder Curve derselben Ordnung und Classe.

Aus den Grundeigenschaften der collinearen Systeme folgt ferner:

Wird die eine Fläche von irgend einer Geraden in einer bestimmten Anzahl von Puncten geschnitten, so wird die entsprechende Fläche von der entsprechenden Geraden in der gleichen Anzahl von

Puncten, in den entsprechenden Puncten, geschnitten. Fallen zwei oder mehrere dieser Schnittpuncte zusammen, so fallen auch die entsprechenden Puncte im anderen Systeme zusammen. Berührt daher eine Gerade die eine Fläche, so berührt die entsprechende Gerade die entsprechende Fläche in den entsprechenden Puncten. Also entspricht jeder Tangente an die eine Fläche wieder eine Tangente an die entsprechende Fläche, somit auch jeder Berührungsebene wieder eine Berührungsebene. Besitzt die eine Fläche gerade Linien, so enthält die andere ebenso viele gerade Linien; geht die eine mehrmals durch eine Curve, so geht die andere ebenso oft durch die entsprechende Curve etc.

Analoges gilt für Curven. Verbindet eine Gerade oder Ebene zwei oder drei Puncte der einen Curve, so verbindet die entsprechende Gerade, resp. Ebene die entsprechenden Puncte. Einer Tangente, Berührungsebene oder Schmiegungeebene der einen Curve entspricht daher auch die Tangente, resp. Berührungs- oder Schmiegungeebene im entsprechenden Puncte an die entsprechende Curve. Gehen daher durch einen Punct des einen Systems n Berührungsebenen oder Schmiegungeebenen an die eine, so gehen durch den entsprechenden Punct ebenfalls n , resp. Berührungs- oder Schmiegungeebenen an die entsprechende Curve. Schneidet eine Ebene die eine Curve in n Puncten, so schneidet die entsprechende Ebene die entsprechende Curve in den n entsprechenden Puncten, wodurch wieder die Behauptung des obigen Satzes dargethan ist.

Collineare Gebilde können sich aber wesentlich hinsichtlich ihrer unendlich fernen Elemente unterscheiden, indem im Allgemeinen den unendlich fernen Puncten des einen Systems eigentliche Puncte im anderen Systeme entsprechen. Denn die unendlich fernen Puncte des einen Systems liegen in der Ebene

$$D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4 = 0,$$

welcher im Allgemeinen nicht wieder die Ebene

$$D_1 \xi_1 + D_2 \xi_2 + D_3 \xi_3 + D_4 \xi_4 = 0$$

entspricht.

Die Ebene nun, welche in dem einen Systeme der unendlich fernen Ebene des anderen Systems entspricht, wird die Gegenebene jenes Systems genannt. Jedem Puncte dieser Ebene entspricht im anderen Systeme ein unendlich ferner Punct; dem Strahlenbündel, der von diesem Puncte getragen wird, ein Parallelstrahlenbündel; einem Ebenenbüschel, dessen Axe in dieser Ebene liegt, ein Parallelebenenbüschel. Schneidet oder berührt eine Curve oder Fläche die Gegenebene, so schneidet oder berührt auch das entsprechende Gebilde die unendlich ferne Ebene; jeder Tangente oder Berührungsebene in einem dieser

Puncte entspricht eine Tangente oder Berührungsebene im unendlich fernen entsprechenden Puncte — eine Asymptote oder Asymptotenebene. Fallen die beiden Gegenebenen mit der unendlich fernen Ebene des Raumes zusammen, so heißen die Systeme affin. In affinen Systemen haben entsprechende Gebilde eine gleiche Anzahl von Puncten mit der unendlich fernen Ebene gemein.

§ 79.

Das Gesetz der Reciprocität.

Sind die beiden Systeme reciprok, so sind die Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punctes des einen Systems mit den Coordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 der entsprechenden Ebene des anderen Systems durch vier Gleichungen von der Form

$$\varrho x_i = \sum_k a_{ik} u_k \quad \text{oder} \quad \sigma u_i = \sum_k A_{ki} x_k,$$

wo A_{ik} die frühere Bedeutung (§ 75) besitzt, verbunden. Die Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ eines Punctes des zweiten Systems sind mit den Coordinaten v_1, v_2, v_3, v_4 seiner entsprechenden Ebene im ersten Systeme hinwiederum durch die Gleichungen verknüpft

$$\varrho \xi_i = \sum_k a_{ki} v_k; \quad \sigma v_i = \sum_k A_{ik} \xi_k.$$

Durch diese Formeln wird also jede Gleichung zwischen den Punct- oder Ebenencoordinaten des einen Systems in eine Gleichung vom selben Grade, aber resp. in Ebenen- oder Punctcoordinaten des anderen Systems übergeführt. Somit:

Jeder Fläche oder Curve von der n^{ten} Ordnung und m^{ten} Classe entspricht im reciproken Systeme resp. eine Fläche oder Curve von der n^{ten} Classe und m^{ten} Ordnung.

Den Puncten der einen Fläche entsprechen hierbei die Ebenen, welche die andere umhüllen, d. h. ihre Tangentialebenen, und es folgt somit aus den fundamentalen Eigenschaften der entsprechenden Gebilde in zwei reciproken Systemen:

Schneidet eine Gerade die eine Fläche in p Puncten, so gehen durch die entsprechende Gerade an die entsprechende Fläche p Berührungsebenen. Berührt demnach eine Gerade die Fläche in einem Puncte, so berührt auch die entsprechende Gerade, welche in der dem Puncte entsprechenden Ebene liegt, die entsprechende Fläche. Denn die eine Gerade erscheint als die Verbindungslinie zweier Puncte der Fläche, die einander sich unbegrenzt genähert haben, also die andere als der Durchschnitt zweier Tangentialebenen, die ebenfalls einander unbegrenzt sich genähert haben.

Den Puncten einer Curve des einen Systems entsprechen die Tangentialebenen einer abwickelbaren Fläche und somit bestimmt jede Curve des einen Systems im anderen Systeme wieder eine Curve derart, daß den Puncten der einen die Schmiegungebenen der anderen und somit jeder Tangente der einen wieder eine Tangente der anderen entspricht. Jeder Ebene, welche n Puncte oder Tangenten der einen Curve enthält, entspricht ein Punct, durch welchen n Schmiegungebenen, resp. Tangenten der anderen hindurchgehen. Jeder ebenen Curve und ihren Tangenten entsprechen bezüglich die Berührungsebenen und Strahlen einer Kegelfläche etc.

Diese Bemerkungen im Verein mit den fundamentalen Eigenschaften zweier reciproken Systeme enthalten das sogenannte Gesetz der Reciprocität, das nur die folgenden Thatsachen unter einem Namen zusammenfaßt:

Wenn irgend ein Gebilde gegeben ist, so kann man auf unendlich viele Arten ein anderes construieren, in welchem die Puncte, Ebenen und Geraden resp. den Ebenen, Puncten und Geraden des ersten entsprechen. Den Puncten des einen, welche in einer Ebene liegen, entsprechen im anderen Ebenen, welche durch einen Punct gehen;

den Puncten einer Geraden des einen Gebildes entsprechen im anderen Ebenen, welche eine Gerade umhüllen;

den Puncten einer Fläche des einen Gebildes entsprechen im anderen Gebilde die Tangentialebenen einer anderen Fläche, und den Tangentialebenen der ersten entsprechen die Puncte der zweiten Fläche, also hat die zweite Fläche resp. dieselbe Ordnung und Classe als die erste Classe und Ordnung. Den Puncten einer Curve des einen Gebildes entsprechen im anderen Gebilde die Schmiegungebenen einer zweiten Curve, und den Schmiegungebenen der ersten entsprechen die Puncte der zweiten Curve; also ist die Ordnung und Classe der zweiten Curve resp. gleich der Classe und Ordnung der ersten.

Zwölftes Capitel.

Das Erzeugnis zweier projectivischer räumlicher Systeme.

§ 80.

Doppelemente zweier collinearer Systeme.

Da zwei collineare oder reciproke räumliche Systeme sich gegenseitig durchdringen, so können entsprechende Elemente der beiden Systeme sich vereinigen oder, wie man sich ausdrückt, incident werden. Sind die beiden Systeme collinear und die Coordinaten der entsprechenden Punkte durch die Gleichungen verknüpft

$$\varrho x_i = \sum_k a_{ik} \xi_k, \quad (1.)$$

so müssen also die Coordinaten jedes Doppelpunctes x_1, x_2, x_3, x_4 der beiden Systeme, d.h. jedes Punctes, in dem zwei entsprechende Punkte der beiden Systeme zusammenfallen, den vier Gleichungen genügen:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \varrho) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 &= 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \varrho) x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 &= 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \varrho) x_3 + a_{34} x_4 &= 0 \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + (a_{44} - \varrho) x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (I.)$$

Ein System von homogenen Gleichungen mit vier Variablen kann aber nur unter der Bedingung durch dieselben vier Werte der Variablen befriedigt werden, daß die Determinante desselben verschwindet. Dem obigen Systeme kann also nur dann genügt werden, wenn ϱ eine Wurzel der Gleichung darstellt:

$$\Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \varrho \end{vmatrix} = 0. \quad (II.)$$

Für jede Wurzel ϱ dieser Gleichung läßt sich das obige Gleichungssystem auflösen, und wir erhalten

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \Delta_{i1} : \Delta_{i2} : \Delta_{i3} : \Delta_{i4}, \quad (III.)$$

wenn wir mit Δ_{ik} die Unterdeterminante jenes Elementes der Determinante $\Delta(\varrho)$ bezeichnen, welches in der i^{ten} Zeile und k^{ten} Colonne steht.

Versuchen wir in analoger Weise die Doppelebenen der beiden collinearen Systeme zu bestimmen, so werden wir wieder auf dieselbe

Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ geführt, so zwar, daß jede Wurzel derselben eine Doppelebene bedingt. Die Coordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 derselben sind dann wieder durch die Proportion gegeben

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \Delta_{i1} : \Delta_{i2} : \Delta_{i3} : \Delta_{i4} \quad (\text{II.})$$

Es bestimmt somit jede Wurzel dieser Gleichung sowohl einen Doppelpunct, als auch eine Doppelebene der beiden collinearen räumlichen Systeme. Wegen dieses Zusammenhanges werden wir bei den folgenden Betrachtungen nur das System I. berücksichtigen.

Im Allgemeinen besitzen also zwei collineare Systeme vier Doppелеlemente, da die Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ vom vierten Grade. Von diesen Doppелеlementen müssen aber keineswegs alle reell sein, sondern es können auch bloß zwei reell und die beiden anderen imaginär oder alle vier imaginär sein, da die Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ vier reelle oder zwei reelle und zwei complexe oder endlich vier complexe Wurzeln besitzen kann.

Sind alle Doppелеlemente reell, so bilden dieselben offenbar die vier Eckpuncte und Seitenflächen eines Tetraeders. Wählen wir dasselbe zum Fundamentaltetraeder, so vereinfachen sich die obigen Collineationsgleichungen in:

$$\varrho x_1 = m_1 \xi_1; \quad \varrho x_2 = m_2 \xi_2; \quad \varrho x_3 = m_3 \xi_3; \quad \varrho x_4 = m_4 \xi_4,$$

wo m_1, m_2, m_3, m_4 Constante bedeuten. Denn nur bei dieser Form der Verwandtschaftsgleichungen entspricht dem Puncte einer Seitenebene des Fundamentaltetraeders wieder ein Punct dieser Ebene.

§ 81.

Fortsetzung.

Wir wollen nun einige specielle Fälle, die sich aus den Formeln (III.) ergeben, etwas näher erörtern. Wie diese Formel lehrt, ist die Berechnung von $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ nur möglich, wenn für die betreffende Wurzel die Subdeterminanten der Elemente einer Zeile der Determinante $\Delta(\varrho)$ nicht sämtlich verschwinden, wodurch die Berechnung aus

$$\left. \begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= \Delta_{11} : \Delta_{12} : \Delta_{13} : \Delta_{14} \\ &= \Delta_{21} : \Delta_{22} : \Delta_{23} : \Delta_{24} \\ &= \Delta_{31} : \Delta_{32} : \Delta_{33} : \Delta_{34} \\ &= \Delta_{41} : \Delta_{42} : \Delta_{43} : \Delta_{44} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.})$$

nicht mehr statthaft wäre.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß diese sämtlichen Subdeterminanten dritten Grades von $\Delta(\varrho)$ verschwinden, wenn drei derselben, von denen keine zwei derselben Reihe angehören, für den betreffenden Wurzelwert Null werden.

Zunächst ist klar, daß, wenn für eine Wurzel der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ überdies eine Subdeterminante dritten Grades von $\Delta(\varrho)$ verschwindet, dies auch der Fall ist mit einer der beiden Reihen Subdeterminanten, welche Elementen angehören, die mit jenem in derselben Zeile oder Colonne stehen. Nehmen wir etwa $\Delta_{ik} = 0$ an, so ergibt sich dies unmittelbar aus dem Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}(a_{11} - \varrho) \Delta_{i1} + a_{12} \Delta_{i2} + a_{13} \Delta_{i3} + a_{14} \Delta_{i4} &= 0 \\ a_{21} \Delta_{i1} + (a_{22} - \varrho) \Delta_{i2} + a_{23} \Delta_{i3} + a_{24} \Delta_{i4} &= 0 \\ a_{31} \Delta_{i1} + a_{32} \Delta_{i2} + (a_{33} - \varrho) \Delta_{i3} + a_{34} \Delta_{i4} &= 0 \\ a_{41} \Delta_{i1} + a_{42} \Delta_{i2} + a_{43} \Delta_{i3} + (a_{44} - \varrho) \Delta_{i4} &= 0,\end{aligned}$$

welches wegen $\Delta_{ik} = 0$ nach bloß drei der Größen $\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \Delta_{i3}, \Delta_{i4}$ homogen ist. Es können somit diese Gleichungen nur neben einander bestehen, entweder für $\Delta_{i1} = \Delta_{i2} = \Delta_{i3} = \Delta_{i4} = 0$ oder, wenn die Determinante je dreier der obigen vier Gleichungen verschwindet, d. i. für $\Delta_{1k} = \Delta_{2k} = \Delta_{3k} = \Delta_{4k} = 0$.

Aus dem obigen Gleichungssysteme folgt ferner, daß, wenn zwei der Subdeterminanten $\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \Delta_{i3}, \Delta_{i4}$ verschwinden und keine Subdeterminante zweiten Grades von $\Delta(\varrho)$ für den betreffenden Wurzelwert Null werden soll, diese sämtlichen Subdeterminanten verschwinden müssen. Wenn also in $\Delta(\varrho) = 0$ die zwei Elementen derselben Reihe angehörigen Subdeterminanten verschwinden, so findet dies auch mit den Subdeterminanten sämtlicher Elemente dieser Reihe statt. Hiermit ist aber unsere obige Behauptung erwiesen.

In diesem Falle muß jene Wurzel der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ eine Doppelwurzel derselben sein, denn, da

$$\frac{\partial \Delta(\varrho)}{\partial \varrho} = - (\Delta_{11} + \Delta_{23} + \Delta_{33} + \Delta_{44})$$

ist, so verschwindet für jenen Wert von ϱ auch $\frac{\partial(\Delta\varrho)}{\partial\varrho}$.

Eine weitere Consequenz unserer Annahme und der Voraussetzung, daß mit den Subdeterminanten dritten keine zweiten Grades verschwinden, ist, daß von den vier Gleichungen (I.), welche zur Bestimmung der Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ dienen, je zwei eine Folge der beiden anderen sind. Um z. B. aus den beiden ersten Gleichungen die dritte abzuleiten, multiplicieren wir die erste mit der Subdeterminante von $(a_{11} - \varrho)$, und die zweite mit der Subdeterminante von a_{21} in

$$\Delta_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - \varrho, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

und addieren die beiden so transformierten Gleichungen. Mittelst der bekannten Formeln, welche die Elemente einer Reihe mit den Sub-

determinanten derselben oder einer parallelen Reihe verbinden, ergibt sich aus $\Delta_{44} = 0$ und $\Delta_{43} = 0$, daß die so aus (I.) gewonnene Gleichung identisch ist mit

$$\begin{vmatrix} a_{12}, & a_{13} \\ a_{22} - \varrho, & a_{23} \end{vmatrix} [a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \varrho)x_3 + a_{34}x_4] = 0.$$

In ganz derselben Weise können wir mit Benutzung von $\Delta_{33} = 0$ und $\Delta_{34} = 0$ zeigen, daß auch die vierte Gleichung des Systems I. eine Folge der beiden ersten ist. Da also in diesem Falle jede der beiden letzten Gleichungen des Systems durch Addition der mit gewissen constanten Factoren multiplicierten beiden ersten Gleichungen gewonnen werden kann, so schneiden sich die vier Ebenen, die durch die Gleichungen des Systems III. bestimmt werden, in einer Geraden, und es sind also die sämtlichen Punkte dieser Geraden Doppelpunkte der beiden collinearen Systeme. Wir gelangen also zu dem Ergebnisse:

„Verschwinden für einen Wurzelwert der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ die Subdeterminanten dreier Elemente, von denen keine zwei derselben Reihe angehören, so verschwinden alle Subdeterminanten 3^{ten} Grades dieser Determinante und es ist jene Wurzel eine Doppelwurzel der biquadratischen Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$. Die Doppelpunkte der beiden collinearen Systeme, welche durch diese Wurzel bestimmt werden, bilden eine Punctreihe.“ Die beiden anderen Wurzeln der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ können entweder von einander verschieden sein, in welchem Falle die Doppelwurzel reell sein muß, oder sie sind selbst wieder einander gleich.

Im letzteren Falle bilden also die Doppelpunkte der beiden collinearen Systeme zwei Punctreihen, deren Träger reell oder imaginär sind, je nachdem die beiden Doppelwurzeln der biquadratischen Gleichung reell oder conjugiert imaginär sind. Es schneidet dann die Schnittlinie je zweier entsprechender Ebenen und die Verbindungslinie je zweier entsprechender Punkte der beiden collinearen Systeme diese beiden Geraden, und es sind somit die Schnittlinien entsprechender Ebenen und die Verbindungslinien entsprechender Punkte sich selbst entsprechende Gerade der beiden collinearen Systeme. Der erste Teil dieser Behauptung ist evident; der zweite Teil ergibt sich, indem wir von irgend einem Punkte des Raumes eine Gerade ziehen, welche die beiden sich selbst entsprechenden Punctreihen schneidet. Da diese Gerade eine sich selbst entsprechende Gerade ist, — weil sie zwei Doppelpunkte der beiden collinearen Systeme verbindet, — so entspricht jedem ihrer Punkte wieder ein auf ihr gelegener Punct. Wir können dieser Thatsache auch die Fassung geben:

„Verschwinden für zwei Wurzelwerte von $\Delta(\varphi) = 0$ die sämtlichen Subdeterminanten dritten Grades in $\Delta(\varphi)$, so bilden die Schnittlinien entsprechender Ebenen und die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden collinearen Systeme eine lineare Congruenz, deren Directricen die Träger zweier sich selbst entsprechender Punctreihen sind.“

Ein specieller Fall dieser Lage zweier collinearer Systeme wurde mit einem besonderen Namen ausgezeichnet. Wir werden unmittelbar auf denselben geführt, wenn wir die Punkte der beiden collinearen Systeme auf ein Tetraeder beziehen, in dem die Träger der beiden gemeinsamen Punctreihen zwei Gegenkanten sind. Da in diesem Tetraeder die Seiten, Kanten und Ecken sich selbst entsprechende Elemente der beiden collinearen Systeme sind, so nehmen die Verwandtschaftsgleichungen derselben die Gestalt an

$$\varphi x_1 = m_1 \xi_1, \quad \varphi x_2 = m_2 \xi_2, \quad \varphi x_3 = m_3 \xi_3, \quad \varphi x_4 = m_4 \xi_4.$$

Da aber, wenn die Kanten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ die Träger der beiden gemeinschaftlichen Punctreihen sind, jeder Punct derselben ein Doppelpunct ist, so muß für jeden Punct der ersten $\frac{x_1}{x_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{\xi_1}{\xi_2}$ und für jeden Punct der zweiten $\frac{x_3}{x_4} = \frac{\xi_3}{\xi_4} = \frac{m_3}{m_4} \frac{\xi_3}{\xi_4}$, also $m_1 = m_2$ und $m_3 = m_4$ sein.

Es wird somit in diesem Falle vermöge des zu Grunde gelegten Tetraeders die collineare Beziehung zwischen den beiden Systemen durch vier Gleichungen von der Form

$$\varphi x_1 = a \xi_1, \quad \varphi x_2 = a \xi_2; \quad \varphi x_3 = b \xi_3, \quad \varphi x_4 = b \xi_4$$

hergestellt, welche wieder die schon früher gewonnene Erkenntnis bestätigen, daß in dem vorliegenden Falle die Gleichung $\Delta(\varphi) = 0$ zwei Doppelwurzeln besitzt.

Ist nun in den Gleichungen (1.) $b = -a$, also die collineare Beziehung zwischen den beiden Systemen durch die Gleichungen

$$\varphi x_1 = a \xi_1; \quad \varphi x_2 = a \xi_2; \quad \varphi x_3 = -a \xi_3; \quad \varphi x_4 = -a \xi_4, \quad (\text{I.})$$

oder

$$\varphi x_1 = \xi_1; \quad \varphi x_2 = \xi_2; \quad \varphi x_3 = -\xi_3; \quad \varphi x_4 = -\xi_4$$

gegeben, so entspricht jedem Punkte des Raumes, mögen wir ihn als Punct des ersten oder zweiten Systems betrachten, stets ein und derselbe andere Punct.

Zwei collineare Systeme nun, bei welchen jedem Punkte des Raumes stets ein einziger anderer Punct zugeordnet ist, werden involutorisch oder in involutorischer Lage genannt; weil in diesem Falle jedem Elemente des Raumes ein einziges anderes doppelt entspricht, so können wir die beiden involutorisch liegenden

Systeme als ein einziges System auffassen, dessen Elemente einander paarweise zugewiesen sind und involutorisches System nennen.

Die Gleichungen (1.) bestimmen also unter den gemachten Voraussetzungen eine Art involutorischer Systeme, deren jedes, wie wir sahen, zwei sich selbst entsprechende Punctreihen besitzt, deren Träger nicht in derselben Ebene liegen. Ein derartiges involutorisches System wird ein geschart-involutorisches System genannt; die Träger der beiden sich selbst entsprechenden Punctreihen heißen dessen Axen und die sich selbst zugeordneten Geraden desselben seine Leitstrahlen.

Auf jedem Leitstrahl bilden die entsprechenden Punkte des involutorischen Systems eine involutorische Punctreihe, deren Doppelpunkte die Durchschnittspunkte der Geraden mit den beiden Axen sind. Es trennen also die beiden Axen je zwei entsprechende Punkte des involutorischen Systems harmonisch.

§ 82.

Involutorische Systeme.

Umgekehrt können wir nun zeigen, daß ein involutorisches System entweder ein „geschart involutorisches System“ oder von der besonderen Beschaffenheit ist, daß die Verbindungslinien seiner entsprechenden Punkte sich in einem Punkte und die Schnittlinien seiner entsprechenden Ebenen sich auf einer fixen Ebene schneiden. Dieser Fall wird sich gleichzeitig als eine Besonderheit der Annahme ergeben, daß für einen Wurzelwert der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ die sämtlichen Subdeterminanten zweiten Grades der Determinante $\Delta(\varrho)$ verschwinden und uns zur Erörterung der Consequenzen dieser Annahme hinüberleiten.

Liegen zwei collineare Systeme involutorisch, so ist die Verbindungslinie jedes Paares entsprechender Punkte und die Schnittlinie je zweier entsprechender Ebenen der beiden Systeme eine sich selbst entsprechende Gerade derselben. Um nun die collineare Beziehung der beiden Systeme durch einfachere Gleichungen ausgedrückt zu erhalten, wollen wir die Punkte derselben auf ein Fundamentaltetraeder beziehen, das zwei solche sich selbst entsprechende Gerade der beiden Systeme zu zwei gegenüberliegenden Kanten hat.

Sind etwa die Kanten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ zwei sich selbst entsprechende Gerade, so muß in

$$\begin{aligned}\varrho x_1 &= a_{11} \xi_1 + a_{12} \xi_2 + a_{13} \xi_3 + a_{14} \xi_4 \\ \varrho x_2 &= a_{21} \xi_1 + a_{22} \xi_2 + a_{23} \xi_3 + a_{24} \xi_4 \\ \varrho x_3 &= a_{31} \xi_1 + a_{32} \xi_2 + a_{33} \xi_3 + a_{34} \xi_4 \\ \varrho x_4 &= a_{41} \xi_1 + a_{42} \xi_2 + a_{43} \xi_3 + a_{44} \xi_4\end{aligned}$$

die Annahme $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ auch $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ergeben, was nur statt hat, wenn

$$a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0.$$

In gleicher Weise folgt aus der Annahme, daß $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ eine sich selbst entsprechende Gerade sei,

$$a_{31} = a_{32} = a_{41} = a_{42} = 0,$$

und es wird also unter den gemachten Voraussetzungen die collineare Beziehung zwischen den beiden Systemen durch die Gleichungen hergestellt

$$\left. \begin{aligned} \varrho x_1 &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 \\ \varrho x_2 &= a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 \\ \varrho x_3 &= a_{33}\xi_3 + a_{34}\xi_4 \\ \varrho x_4 &= a_{43}\xi_3 + a_{44}\xi_4 \end{aligned} \right\} \quad (1.)$$

Diese Gleichungen ergaben sich als Folge blos der Annahme, daß die beiden Kanten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ zwei sich selbst entsprechende Gerade seien und sind also auch unabhängig von der weiteren Voraussetzung, daß die beiden collinearen Systeme involutorisch seien. Diese Voraussetzung nun drückt sich dadurch aus, daß im obigen Gleichungssysteme die x mit den ξ vertauscht werden können. Es müssen also die x und ξ sowohl durch die Gleichungen (1.) als auch durch die folgenden

$$\begin{aligned} \varrho \xi_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \varrho \xi_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \varrho \xi_3 &= a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ \varrho \xi_4 &= a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{aligned}$$

zusammenhängen. Damit dies nun möglich sei, müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\xi_1}{\xi_2} &= \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2} \\ &= \frac{(a_{11}^2 + a_{12}a_{21})\xi_1 + (a_{11} + a_{22})a_{12}\xi_2}{a_{21}(a_{11} + a_{22})\xi_1 + (a_{12}a_{21} + a_{22}^2)\xi_2} \\ \frac{\xi_3}{\xi_4} &= \frac{(a_{33}^2 + a_{34}a_{43})\xi_3 + (a_{33} + a_{44})a_{34}\xi_4}{a_{43}(a_{33} + a_{44})\xi_3 + (a_{34}a_{43} + a_{44}^2)\xi_4} \\ \frac{\xi_1}{\xi_3} &= \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{33}x_3 + a_{34}x_4} \\ &= \frac{(a_{11}^2 + a_{12}a_{21})\xi_1 + a_{12}(a_{11} + a_{22})\xi_2}{(a_{33}^2 + a_{34}a_{43})\xi_3 + (a_{33} + a_{44})a_{34}\xi_4} \end{aligned}$$

für beliebige Werte von ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , ξ_4 bestehen können, was wieder nur bei besonderer Beschaffenheit der Constanten a möglich ist. Die

erste dieser Gleichungen ergibt als Bedingung ihres Bestandes die Annahme, entweder

$$a_{11} + a_{22} = 0$$

oder

$$a_{21} = 0, \quad a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0;$$

die zweite entweder

$$a_{33} + a_{44} = 0$$

oder

$$a_{34} = 0, \quad a_{33} = a_{44}, \quad a_{43} = 0,$$

die dritte

$$a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = a_{33}^2 + a_{34}a_{43}$$

$$a_{12}(a_{11} + a_{22}) = 0, \quad a_{34}(a_{33} + a_{44}) = 0.$$

Die drei obigen Gleichungen können somit nur zusammen bestehen, sobald die a einer der folgenden vier Voraussetzungen genügen:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} + a_{22} &= 0 \\ a_{34} &= 0, \quad a_{33} = a_{44}; \quad a_{43} = 0 \\ a_{11}^2 + a_{12}a_{21} &= a_{33}^2; \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.})$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11} + a_{22} &= 0 \\ a_{33} + a_{44} &= 0; \\ a_{11}^2 + a_{12}a_{21} &= a_{33}^2 + a_{34}a_{43} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.})$$

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= 0, \quad a_{11} = a_{22}, \quad a_{22} = 0 \\ a_{33} + a_{44} &= 0 \\ a_{33}^2 + a_{34}a_{43} &= a_{11}^2; \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.})$$

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= 0, \quad a_{11} = a_{22}, \quad a_{21} = 0 \\ a_{34} &= 0, \quad a_{33} = a_{44}, \quad a_{43} = 0 \\ a_{11} &= a_{22} = -a_{33} = -a_{44} \end{aligned} \right\}; \quad (\text{IV.})$$

wenn also die Coefficienten der Gleichungen (1.) eine der vier vorstehenden Bedingungen erfüllen, und nur dann bestimmen sie ein involutorisches System. Dasselbe ist nur im Falle (II.) und (IV.) ein geschart-involutorisches System; die beiden übrigen Fälle weisen die gemeinsame Eigenschaft auf, daß für die Werte ihrer Constanten a die biquadratische Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ eine dreifache Wurzel besitzt und daß für diesen Wurzelwert die sämtlichen Subdeterminanten zweiten Grades der Determinante $\Delta(\varrho)$ verschwinden.

So ist

$$\varrho = +a_{33}$$

im ersten und

$$\varrho = +a_{11}$$

im dritten Falle eine dreifache Wurzel der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$, für welche sämtliche Subdeterminanten zweiten Grades der Determinante

$\Delta(\varrho)$ Null werden. Es ist klar, daß diese Multiplicität der Wurzel als eine Folge des letzteren Umstandes aufgefaßt werden kann, des Verschwindens sämtlicher Subdeterminanten zweiten Grades der Determinante $\Delta(\varrho)$.

Wir gelangen also durch diese Erörterungen zu folgendem Ergebnisse:

„Ein involutorisches System ist entweder ein geschart-involutorisches System oder es wird die Beziehung zwischen seinen Elementen durch vier Gleichungen hergestellt, deren Coefficienten so beschaffen sind, daß für eine Wurzel der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ die sämtlichen Subdeterminanten zweiten Grades der Determinante $\Delta(\varrho)$ verschwinden.“

Wir werden auf diese Weise zur Untersuchung des Falles hingelenkt, daß die sämtlichen Subdeterminanten zweiten Grades der Determinante $\Delta(\varrho)$ verschwinden, welcher Fall übrigens auch methodisch der früher erörterten Annahme sich anschließt, daß die sämtlichen Subdeterminanten dritten Grades der Determinante $\Delta(\varrho)$ für eine Wurzel der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ verschwinden.

Die zweite Art involutorischer Systeme wird offenbar alle Eigenschaften teilen mit den Systemen, deren collineare Beziehung durch vier derartige Gleichungen bestimmt wird.

§ 83.

Perspectivische collineare Systeme.

Damit für einen Wurzelwert ϱ der Gleichung

$$\Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

die sämtlichen Subdeterminanten zweiten Grades der Determinante $\Delta(\varrho)$ verschwinden, genügt es, wenn neun derartige Subdeterminanten, von denen keine vier aus Elementen derselben zwei Reihen gebildet sind, Null werden. Denn aus je drei Subdeterminanten zweiten Grades, welche aus den Elementen derselben beiden Reihen hergestellt werden, ergeben sich, wenn sie verschwinden, die weiteren drei, welche aus den Elementen derselben Reihe gebildet werden können, gleich Null.

Als Folge dieser Voraussetzung ergibt sich aus den verschwindenden Subdeterminanten, daß für den betreffenden Wurzelwert σ die Proportionen gelten:

$$\begin{aligned}
& (a_{11} - \sigma) : a_{12} : a_{13} : a_{14} \\
& = a_{21} : (a_{22} - \sigma) : a_{23} : a_{24} \\
& = a_{31} : a_{32} : (a_{33} - \sigma) : a_{34} \\
& = a_{41} : a_{42} : a_{43} : (a_{44} - \sigma).
\end{aligned}$$

Es müssen also die sechszehn Constanten a , damit die vorstehenden Bedingungen erfüllt werden, die Form besitzen

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \alpha_1 \beta_1 + \sigma, & a_{12} &= \alpha_1 \beta_2, & a_{13} &= \alpha_1 \beta_3, & a_{14} &= \alpha_1 \beta_4 \\
a_{21} &= \alpha_2 \beta_1, & a_{22} &= \alpha_2 \beta_2 + \sigma, & a_{23} &= \alpha_2 \beta_3, & a_{24} &= \alpha_2 \beta_4 \\
a_{31} &= \alpha_3 \beta_1, & a_{32} &= \alpha_3 \beta_2, & a_{33} &= \alpha_3 \beta_3 + \sigma, & a_{34} &= \alpha_3 \beta_4 \\
a_{41} &= \alpha_4 \beta_1, & a_{42} &= \alpha_4 \beta_2, & a_{43} &= \alpha_4 \beta_3, & a_{44} &= \alpha_4 \beta_4 + \sigma.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen, welche die Collineation der beiden Systeme ausdrücken, haben hiernach im vorliegenden Falle die Gestalt

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= (\alpha_1 \beta_1 + \sigma) \xi_1 + \alpha_1 \beta_2 \xi_2 + \alpha_1 \beta_3 \xi_3 + \alpha_1 \beta_4 \xi_4 \\
\varrho x_2 &= \alpha_2 \beta_1 \xi_1 + (\alpha_2 \beta_2 + \sigma) \xi_2 + \alpha_2 \beta_3 \xi_3 + \alpha_2 \beta_4 \xi_4 \\
\varrho x_3 &= \alpha_3 \beta_1 \xi_1 + \alpha_3 \beta_2 \xi_2 + (\alpha_3 \beta_3 + \sigma) \xi_3 + \alpha_3 \beta_4 \xi_4 \\
\varrho x_4 &= \alpha_4 \beta_1 \xi_1 + \alpha_4 \beta_2 \xi_2 + \alpha_4 \beta_3 \xi_3 + (\alpha_4 \beta_4 + \sigma) \xi_4
\end{aligned}$$

und es ergibt sich somit für die Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$, welche zur Bestimmung der Doppelemente der beiden Systeme dient,

$$\Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} (\alpha_1 \beta_1 + \sigma - \varrho), & \alpha_1 \beta_2, & \alpha_1 \beta_3, & \alpha_1 \beta_4 \\ \alpha_2 \beta_1, & (\alpha_2 \beta_2 + \sigma - \varrho), & \alpha_2 \beta_3, & \alpha_2 \beta_4 \\ \alpha_3 \beta_1, & \alpha_3 \beta_2, & (\alpha_3 \beta_3 + \sigma - \varrho), & \alpha_3 \beta_4 \\ \alpha_4 \beta_1, & \alpha_4 \beta_2, & \alpha_4 \beta_3, & (\alpha_4 \beta_4 + \sigma - \varrho) \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Entwicklung der Determinante finden wir

$$\Delta(\varrho) = (\varrho - \sigma)^3 [\varrho - \sigma - \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 - \alpha_3 \beta_3 - \alpha_4 \beta_4],$$

welche Formel lehrt, daß die Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ eine dreifache Wurzel $\varrho = \sigma$ und die einfache Wurzel $\varrho = \sigma + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 + \alpha_4 \beta_4$ besitzt. Die vier Gleichungen, welche zur Bestimmung des Doppelpunctes dienen, der dem Wurzelwerte $\varrho = \sigma$ entspricht, fallen in eine einzige zusammen:

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 = 0 \quad (1.)$$

und es ist somit jeder Punct dieser Ebene ein Doppelpunct der beiden Systeme. Außerhalb dieser Ebene existiert noch ein weiterer Doppelpunct, welcher der einfachen Wurzel

$$\varrho = \sigma + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 + \alpha_4 \beta_4$$

der biquadratischen Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ entspricht. Seine Coordinaten werden somit durch die Gleichungen bestimmt

$$\begin{aligned}
& - (\alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 + \alpha_4 \beta_4) x_1 + \alpha_1 \beta_2 x_2 + \alpha_1 \beta_3 x_3 + \alpha_1 \beta_4 x_4 = 0 \\
& \alpha_2 \beta_1 x_1 - (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_3 \beta_3 + \alpha_4 \beta_4) x_2 + \alpha_2 \beta_2 x_3 + \alpha_2 \beta_4 x_4 = 0 \\
& \alpha_3 \beta_1 x_1 + \alpha_3 \beta_2 x_2 - (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_4 \beta_4) x_3 + \alpha_3 \beta_4 x_4 = 0 \\
& \alpha_4 \beta_1 x_1 + \alpha_4 \beta_2 x_2 + \alpha_4 \beta_3 x_3 - (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3) x_4 = 0,
\end{aligned}$$

woraus sich für dieselben die Werte ergeben

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4. \quad (2.)$$

Man erkennt nun leicht, daß die Verbindungslinie je zweier entsprechenden Punkte der beiden collinearen Systeme durch diesen Doppelpunkt hindurchgeht und daß die Schnittlinie irgend zweier entsprechender Ebenen derselben in der Ebene (1.) liegt. Somit:

„Verschwinden für einen Wurzelwert ϱ der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ sämtliche Subdeterminanten zweiten Grades der Determinante $\Delta(\varrho)$, so haben die beiden collinearen Systeme einen Strahlenbündel und ein ebenes System gemeinsam.“

Diese Lage zweier collinearer Systeme, bei welcher sie ein ebenes System und einen Strahlenbündel gemein haben, wird die perspectivische genannt.

Es ist aber klar, daß zwei collineare Systeme, die ein ebenes System gemein haben, auch einen Strahlenbündel gemeinsam haben, und umgekehrt: daß zwei collineare Systeme mit einem gemeinsamen Strahlenbündel auch ein ebenes System gemein haben. Diese Behauptung fließt eigentlich unmittelbar aus der Thatsache, daß die Wurzeln der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ nicht allein die Doppelpunkte, sondern auch die Doppelebenen der beiden Systeme bestimmen, kann aber auch unabhängig hiervon folgendermassen bewiesen werden. Haben die beiden Systeme ein ebenes System gemeinsam, so schneiden sich je zwei entsprechende Ebenen E und E' der beiden räumlichen Systeme in einer Geraden des gemeinsamen ebenen Systems. Die beiden collinearen Systeme Σ und Σ' haben somit die Punkte ihrer Schnittlinie zu Doppelpunkten und liegen also perspectivisch. Die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte von E und E' schneiden sich daher in einem Punkte O , dem Projectionscentrum der beiden collinearen ebenen Systeme. Dieser Punkt ist aber der Träger eines beiden räumlichen collinearen Systemen gemeinsamen Strahlenbündels. Denn jeder aus O gezogene Strahl trifft die beiden ebenen Systeme Σ und Σ' in zwei entsprechenden Punkten der beiden räumlichen collinearen Systeme und das ebene System Σ in einem Doppelpunkt derselben: Der Strahl ist somit eine sich selbst entsprechende Gerade der beiden räumlichen collinearen Systeme. W. z. b. w.

Ist umgekehrt O der Träger eines den beiden räumlichen collinearen Systemen gemeinsamen Strahlenbündels, so liegen je zwei

Strahlenbündel derselben, deren Mittelpunkte entsprechende Punkte der beiden Systeme sind, perspectivisch, da die beiden Strahlenbündel einen Ebenenbüschel gemeinsam haben. Der perspectivische Durchschnitt der beiden Strahlenbündel ist ein den beiden räumlichen Systemen gemeinsames ebenes System.

Wir erhalten so den Satz:

Haben zwei collineare räumliche Systeme einen Strahlenbündel oder ein ebenes System gemeinsam, so sind sie perspectivisch.

Mit Benutzung des Begriffes zweier perspectivischer räumlicher Systeme können wir die Ergebnisse des vorangehenden Paragraphen in den Satz zusammenfassen:

Ein involutorisches räumliches System ist entweder ein „geschart-involutorisches“ System, oder die beiden collinearen Systeme, welche dasselbe bilden, liegen perspectivisch, in welchem Falle dasselbe ein perspectivisch-involutorisches System genannt wird.

In einem perspectivisch-involutorischen Systeme gehen somit die Verbindungslinien je zweier entsprechenden Punkte desselben durch einen Punkt und schneiden sich die Schnittlinien je zweier entsprechenden Ebenen desselben auf derselben Ebene.

§ 84.

Erzeugnisse zweier reciproker Systeme.

Es seien die beiden räumlichen Systeme, nach deren incidenten Elemente wir forschen, zu einander reciprok. Bezeichnen wir dann mit x_1, x_2, x_3, x_4 und v_1, v_2, v_3, v_4 die Coordinaten resp. eines Punktes und einer Ebene des ersten mit $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ und u_1, u_2, u_3, u_4 die Coordinaten der gleichartigen Elemente des zweiten Systems, so hängen die Coordinaten entsprechender Elemente der beiden Systeme durch folgende Gleichungen zusammen:

$$\varrho x_i = \sum_k a_{ik} u_k; \quad \sigma u_i = \sum_k A_{ik} x_k \quad (\text{I.})$$

$$\varrho \xi_i = \sum_k a_{ki} v_k; \quad \sigma v_i = \sum_k A_{ki} \xi_k, \quad (\text{II.})$$

wo die einzelnen Buchstaben satzsam bekannte Bedeutungen haben. Von diesen vier Gleichungen wurden zwei aus den beiden anderen durch Auflösung eines Gleichungssystems gewonnen und sie konnten also nur unter der selbstverständlichen Bedingung abgeleitet werden, daß die Determinante des ursprünglichen, die Verwandtschaft definierenden Gleichungssystems nicht verschwinde. Bevor wir nun

diesen allgemeineren Fall erörtern, wollen wir in Kürze den Ausnahmefall besprechen, daß die Determinante des Gleichungssystems Null sei.

1) Wir werden hierbei zwei Fälle zu unterscheiden haben, je nachdem die Verwandtschaftsgleichungen die Punct- oder Ebenencoordinaten des einen Systems durch die Coordinaten des entsprechenden Elementes des anderen Systems ausdrücken.

a) Sind

$$\varrho x_i = \sum_k a_{ik} u_k \quad (\alpha)$$

die gegebenen Verwandtschaftsgleichungen, so folgt aus ihnen allerdings wieder

$$\varrho \xi_i = \sum_k a_{ki} v_k, \quad (\beta)$$

jedoch die beiden anderen Gleichungssysteme in (I.) und (II.) sind unter der Voraussetzung $\sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = 0$ nicht mehr ableitbar. Aus der ersten dieser Gleichungen folgt aber

$$A_{1i}x_1 + A_{2i}x_2 + A_{3i}x_3 + A_{4i}x_4 = 0,$$

welche Gleichung für jedes beliebige i ein und dieselbe Ebene darstellen, da infolge $\sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = 0$ auch

$$A_{1i} : A_{2i} : A_{3i} : A_{4i} = A_{1k} : A_{2k} : A_{3k} : A_{4k}$$

$$A_{i1} : A_{i2} : A_{i3} : A_{i4} = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3} : A_{k4}$$

ist. Ebenso folgt aus dem zweiten Gleichungssysteme

$$A_{i1}\xi_1 + A_{i2}\xi_2 + A_{i3}\xi_3 + A_{i4}\xi_4 = 0.$$

Es liegen also in jedem Systeme die Punkte, welche den Ebenen des anderen Systems entsprechen, in einer bestimmten Ebene.

Aus den beiden Verwandtschaftsgleichungen ergibt sich auch, daß die Coordinaten der Ebenen, deren jede durch ihren entsprechenden Punct geht, der Gleichung genügen

$$\sum a_{ik} u_i u_k = 0.$$

Diese Ebenen bilden somit einen Ebenenbündel der zweiten Ordnung, dem auch die beiden Ebenen angehören, deren jede die Punkte enthält, welche durch die Ebenen jedes der beiden Systeme bestimmt werden. Denn die Gleichung wird erfüllt sowohl durch die Wertgruppe $u_1 = A_{1i}, u_2 = A_{2i}, u_3 = A_{3i}, u_4 = A_{4i}$, als auch durch $u_1 = A_{i1}, u_2 = A_{i2}, u_3 = A_{i3}, u_4 = A_{i4}$.

Die beiden zu einander reciproken Systeme, welche von diesen beiden Ebenen getragen werden und den Ebenenbündel der zweiten Ordnung bilden, sind leicht zu erkennen. Nennen wir der Kürze halber die Ebene, welche die Punkte trägt, die durch die Ebenen des zweiten Systems (α) bestimmt werden, E , und die andere E' .

Jede Ebene des Raumes, aufgefaßt als Ebene des einen Systems bestimmt in der einen dieser Ebenen einen Punct und schneidet die andere in einer Geraden. Jeder Ebene des durch diese Gerade bestimmten Ebenenbüschels, aufgefaßt als Ebene des einen Systems, entspricht nun ein und derselbe Punct. Denn sind u_1, u_2, u_3, u_4 die Coordinaten einer Ebene des Ebenenbüschels, desse Axe in E liegt, so lassen sich die Coordinaten jeder anderen Ebene desselben in der Form darstellen $\lambda u_k + \mu A_{ik}$, wo λ und μ Constante sind und k alle Werte von 1 bis 4 annimmt; somit bestimmen diese Ausdrücke aus den Verwandtschaftsgleichungen dieselben Punctcoordinaten, wie die Ebene u_1, u_2, u_3, u_4 . Auf diese Weise ist also jedem Puncte des einen der beiden Systeme E oder E' eine Gerade des anderen zugewiesen, und diese beiden reciproken Systeme erzeugen die obige Fläche der zweiten Classe.

Diese Fläche der zweiten Classe schrumpft offenbar in eine Curve der zweiten Classe zusammen, wenn $a_{ik} = a_{ki}$. Denn dann fallen die beiden Ebenen E und E' zusammen und diese Doppelebene trägt somit zwei reciproke Systeme, die involutorisch liegen, da jeder Ebene ein und derselbe Punct zugeordnet ist.

„Verschwindet die symmetrische Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$, so stellt die Gleichung

$$\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0$$

eine Curve zweiter Classe dar, deren Ebene die Coordinaten $u_1 = A_{1i}$, $u_2 = A_{2i}$, $u_3 = A_{3i}$, $u_4 = A_{4i}$ besitzt.“

b) Sind die gegebenen Verwandtschaftsgleichungen

$$\sigma v_i = \Sigma a_{ik} x_k,$$

so folgt aus ihnen nur noch das Gleichungssystem

$$\sigma u_i = \Sigma a_{ki} \xi_k.$$

Die Ebenen des einen Systems, welche Puncten des anderen entsprechen, schneiden sich sämtlich in einem Puncte. Die Puncte des ersten Systems bestimmen den Punct A_{1i} , A_{2i} , A_{3i} , A_{4i} , die des zweiten den Punct A_{i1} , A_{i2} , A_{i3} , A_{i4} .

Die Puncte der beiden Systeme, deren jeder in seiner entsprechenden Ebene des anderen Systems liegt, erfüllen eine Fläche der zweiten Ordnung:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0,$$

welche auch die beiden Puncte enthält, deren jeder durch die Puncte eines der beiden Systeme bestimmt wird. Dieselben lassen sich als die Mittelpuncte zweier reciproken Strahlenbündel ansehen, welche die obige Fläche erzeugen, da den Puncten eines Strahles des einen Bündels im anderen Systeme stets dieselbe Ebene entspricht.

Die Fläche geht offenbar in einen Kegel über, wenn $a_{ik} = a_{ki}$ ist, denn dann fallen die Mittelpunkte der beiden reciproken Bündel zusammen, die überdies involutorisch werden, da unter dieser Voraussetzung jedem Punkte dieselbe Ebene entspricht. Somit:

„Verschwindet die symmetrische Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$, so stellt die Gleichung

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

eine Kegelfläche dar, deren Spitze die Coordinaten

$$x_1 = A_{1i}, x_2 = A_{2i}, x_3 = A_{3i}, x_4 = A_{4i}$$

besitzt.“

2) Bezeichnen wir nun unter der Voraussetzung, daß die Determinante $\Sigma \pm a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ nicht verschwindet, mit y_1, y_2, y_3, y_4 laufende Coordinaten, so entspricht dem Punkte

1) x_1, x_2, x_3, x_4 des ersten Systems im zweiten Systeme die Ebene

$$\Sigma A_{ik} x_k y_i = 0, \quad (\text{III.})$$

2) $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ des zweiten Systems im ersten Systeme die Ebene

$$\Sigma A_{ki} \xi_k y_i = 0. \quad (\text{III'.})$$

Bezeichnen wir mit w_1, w_2, w_3, w_4 die laufenden Coordinaten in der Gleichung eines Punktes, so entspricht der Ebene

1) v_1, v_2, v_3, v_4 des ersten Systems im zweiten Systeme der Punkt

$$\Sigma a_{ki} v_k w_i = 0, \quad (\text{IV.})$$

2) u_1, u_2, u_3, u_4 des zweiten Systems im ersten Systeme der Punkt

$$\Sigma a_{ik} u_k w_i = 0. \quad (\text{IV'.})$$

Der Anblick dieser Gleichungen lehrt:

Jeder Punkt der beiden Systeme,
welcher der Fläche

$$\Sigma A_{ik} x_i x_k = 0$$

angehört, liegt in seiner entsprechenden Ebene.

Jede Ebene der beiden Systeme,
welche die Fläche

$$\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0$$

umhüllt, geht durch ihren entsprechenden Punkt.

Es bilden somit die Punkte der beiden Systeme, welche in ihre entsprechenden Ebenen fallen, eine Fläche der zweiten Ordnung und die diesen Punkten entsprechenden Ebenen umhüllen eine Fläche der zweiten Classe.

Diese beiden Flächen sind im Allgemeinen von einander verschieden, denn sind u_1, u_2, u_3, u_4 die Coordinaten irgend einer Ebene, so entspricht ihr im ersten Systeme der Punct

$$\varrho x_i = \sum_k a_{ik} u_k, \quad (1.)$$

und im zweiten der Punct

$$\varrho \xi_i = \sum_k a_{ki} u_k. \quad (2.)$$

Diese beiden Punkte sind also von einander verschieden, so lange a_{ik} nicht für jeden Wert von i und k gleich a_{ki} ist, und liegt der eine in der Ebene u_1, u_2, u_3, u_4 , so ist dies auch mit dem anderen der Fall, da dann die Coordinaten der Ebene der Relation genügen:

$$\begin{aligned} \varrho(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4) &= \sum a_{ik} u_i u_k \\ &= \varrho'(u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 + u_4 \xi_4) = 0. \end{aligned}$$

Geht somit eine Ebene, betrachtet als dem einen Systeme angehörig, durch ihren entsprechenden Punct im anderen Systeme, so ist auch der ihr entsprechende Punct des ersten Systems in ihr gelegen. Die reciproke Betrachtung lehrt überdies, daß jeder Punct gleichzeitig in seinen beiden ihm zugeordneten Ebenen liegt. Es umhüllen also im Allgemeinen diese Ebenen nicht gleichzeitig die von den incidenten Punkten gebildete Fläche

$$\sum A_{ik} x_i x_k = 0,$$

sondern eine andere Fläche der zweiten Ordnung.

§ 85.

Das Polarsystem.

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen die von den incidenten Punkten gebildete und von den incidenten Ebenen umhüllte Fläche identisch sind.

Der Ebene e entspreche im ersten Systeme der ihr incidente Punct E , dann fällt auch der ihr im zweiten Systeme entsprechende Punct E' in sie. Dem Puncte E des zweiten Systems entspricht im ersten Systeme eine gleichfalls incidente Ebene e_1 . Der dieser Ebene im ersten Systeme entsprechende Punct E_1 liegt nach dem Vorhergehenden in e_1 , aber auch in e , da dem Puncte E im zweiten Systeme die Ebene e entspricht. Die diesem Puncte E_1 im ersten Systeme entsprechende Ebene e' geht aus denselben Gründen sowohl durch E_1 , als auch durch E' . Es liegen also in der Ebene e drei ihren Ebenen incidente Punkte, E' , E und E_1 . Diese drei Punkte und gleichfalls die drei mit ihnen respective incidenten Ebenen e , e_1 und e' fallen

zusammen und können auch nur dann zusammenfallen, wie die Relationen § 84 I, II, 1. und 2. zeigen, wenn die Determinante $\Sigma \pm a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ symmetrisch ist. In diesem Falle ist also diese Ebene, welche der Fläche der zweiten Classe $\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0$ angehört, eine Berührungsebene der Fläche $\Sigma A_{ik} x_i x_k = 0$, da sie mit ihr drei zusammenfallende Punkte (E, E', E_1) gemeinsam hat und jener Punkt der Fläche $\Sigma A_{ik} x_i x_k = 0$ ein Punkt der Fläche $\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0$, da sich in ihm drei unendlich benachbarte Umhüllungsebenen derselben (e, e', e_1) schneiden. Unter dieser Bedingung umhüllen also die incidenten Ebenen die von den incidenten Punkten gebildete Fläche.

Ist nun in den Gleichungen (I.) $a_{ik} = a_{ki}$ und somit $A_{ik} = A_{ki}$, so zeigen dieselben, daß jedem Elemente, mag man es als Element des ersten oder zweiten räumlichen Systems betrachten, ein und dasselbe andere Element entspricht. Wir können daher die beiden räumlichen Systeme als ein einziges System betrachten, in welchem jedem Punkte eine Ebene und jeder Geraden eine Gerade zugeordnet sind. Ein solches System wird ein Polarsystem genannt; jeder Punkt heißt der Pol der ihm zugeordneten Ebene, jede Gerade oder Ebene heißt die Polare des ihr zugeordneten Strahles resp. Punktes. Die Coordinaten eines Punktes und seiner entsprechenden Ebene sind durch die Gleichungen mit einander verknüpft:

$$\varrho x_i = \sum_k a_{ik} u_k \quad \text{oder} \quad \sigma u_i = \sum_k A_{ik} x_k,$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$ ist.

In dem Polarsysteme

$$\varrho x_i = \sum_k a_{ik} u_k,$$

erfüllen die Pole, die in ihren Ebenen liegen, die Fläche der zweiten Ordnung

$$\sum_{ik} A_{ik} x_i x_k = 0,$$

welche von den Polarebenen dieser Punkte umhüllt wird, deren Gleichung in Ebenencoordinaten somit

$$\sum_{ik} a_{ik} u_i u_k = 0$$

ist.

Diese Fläche wird die Ordnungsfläche des Polarsystems genannt.

Jedes Polarsystem besitzt unendlich viele Tetraeder, in deren jedem jede Ecke der Pol ihrer gegenüberliegenden Seitenebene ist und also jede Kante die gegenüberliegende Kante zur Polare hat. Für jedes solche Poltetraeder als Fundamentaltetraeder nimmt die

Gleichung der Ordnungsfläche eine merkwürdige einfache Form an. Da nämlich dann der Ebene $x_1 = 0$ die Ecke $u_1 = 0$ entsprechen soll, so muß in den Gleichungen

$$\varrho x_i = \sum_k a_{ik} u_k$$

$a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$ sein; die Annahme, daß auch jede der anderen Tetraederecken ihre gegenüberliegende Seitenfläche zur Polarebene habe, hat zur Folge

$$a_{21} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = a_{34} = a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0.$$

Die Gleichungen, welche die Beziehungen zwischen den Elementen des Polarsystems ausdrücken, nehmen hierdurch die einfache Form an

$$\varrho x_1 = a_{11} u_1; \quad \varrho x_2 = a_{22} u_2; \quad \varrho x_3 = a_{33} u_3; \quad \varrho x_4 = a_{44} u_4.$$

Die Gleichung der Ordnungsfläche des Polarsystems erhält somit für ein solches Poltetraeder als Fundamentaltetraeder die Form

$$\frac{x_1^2}{a_{11}} + \frac{x_2^2}{a_{22}} + \frac{x_3^2}{a_{33}} + \frac{x_4^2}{a_{44}} = 0,$$

und in Ebenencoordinaten

$$a_{11} u_1^2 + a_{22} u_2^2 + a_{33} u_3^2 + a_{44} u_4^2 = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die Ordnungsfläche eines Polarsystems auch imaginär sein kann, was eintritt, wenn in denselben sämtliche Größen $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ gleichbezeichnet sind.

Es läßt sich aber auch umgekehrt jede Fläche zweiten Grades mit Ausnahme der Kegelfläche als die Ordnungsfläche eines Polarsystems betrachten. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades in den Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 besitzt nämlich die Form

$$\begin{aligned} a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 \\ + 2a_{14} x_1 x_4 + 2a_{24} x_2 x_4 + 2a_{34} x_3 x_4 + a_{44} x_4^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.)$$

Die durch sie repräsentierte Fläche ist daher, vorausgesetzt daß die symmetrische Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ nicht verschwindet, die Ordnungsfläche des Polarsystems

$$\sigma u_i = \sum_k a_{ik} x_k; \quad \varrho x_i = \sum_k A_{ik} u_k,$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$. Die Gleichung dieser Ordnungsfläche in Ebenencoordinaten ist somit

$$\begin{aligned} A_{11} u_1^2 + 2A_{12} u_1 u_2 + A_{22} u_2^2 + 2A_{13} u_1 u_3 + 2A_{23} u_2 u_3 + A_{33} u_3^2 \\ + 2A_{14} u_1 u_4 + 2A_{24} u_2 u_4 + 2A_{34} u_3 u_4 + A_{44} u_4^2 = 0, \end{aligned}$$

welche Gleichung wir offenbar auch in der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.)$$

schreiben können. Ist also die Gleichung einer Fläche zweiten Grades in Punctkoordinaten gegeben, so lehrt uns die oben stehende Relation (2.) deren Gleichung in Ebenencoordinaten aufstellen. Die symmetrische Determinante $\Sigma \pm a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ wird die Determinante jener quadratischen Form (1.) genannt, die gleich Null gesetzt die Gleichung der Fläche zweiten Grades bildet. Ist somit die Gleichung einer Fläche zweiten Grades in Punctkoordinaten gegeben, so stellt die mit den Ebenencoordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 umränderte Determinante ihrer quadratischen Form die linke Seite der Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten vor; diese nach den Ebenencoordinaten also gleichfalls quadratische Form (2.) wird die adjungierte von (1.) genannt. In ganz derselben Weise können wir umgekehrt von dieser adjungierten zur ursprünglichen quadratischen Form zurückgehen. Aus (1.) und (2.) folgt auch:

Die Fläche zweiter Ordnung ist auch zweiter Classe und umgekehrt.

§ 86.

Die Fläche der zweiten Ordnung.

Aus dieser Darstellung der Fläche zweiten Grades als Ordnungsfläche eines Polarsystems können wir mit Leichtigkeit einige Haupteigenschaften der Fläche ableiten. Zu diesem Behufe wollen wir einige Eigenschaften des Polarsystems, welche aus seiner Entstehungsweise aus zwei reciproken Systemen sich unmittelbar ergeben, in veränderter Fassung wiederholen.

Liegt von zwei Puncten der erste auf der Polare des zweiten, so liegt auch der zweite auf der Polare des ersten Punctes.

Geht eine Gerade durch einen Punct, so liegt ihre Polare in der Polarebene des Punctes.

Zwei Puncte, oder ein Punct und ein Strahl sollen conjugiert heißen, wenn jeder in der Polare des anderen liegt.

Geht von zwei Ebenen die erste durch den Pol der zweiten, so geht auch die zweite durch den Pol der ersten Ebene.

Liegt eine Gerade in einer Ebene, so geht ihre Polare durch den Pol dieser Ebene.

Zwei Ebenen, oder eine Ebene und eine Gerade sollen conjugiert heißen, wenn jede durch den Pol resp. die Polare der anderen geht.

Zwei Gerade sollen conjugiert genannt werden, wenn jede mit der Polare der anderen in einer Ebene liegt.

Es ist somit ein Punct allen Puncten und Strahlen conjugiert, die in seiner Polarebene liegen; eine Ebene allen Ebenen und Strahlen die durch ihren Pol gehen; eine Gerade allen Puncten, welche auf ihrer Polare liegen, allen Ebenen, welche durch diese hindurchgehen, und allen Geraden, von welchen ihre Polare geschnitten wird. Jeder Punct, jede Berührungsebene und jede Tangente der Ordnungsfläche des Polarsystems ist somit sich selbst conjugiert, und umgekehrt.

Da einem Puncte einer Geraden auf derselben ein einziger Punct conjugiert ist, der Durchschnittspunct der Geraden mit der Polarebene des Punctes, ebenso einer Ebene, die durch eine Gerade hindurchgeht, eine einzige Ebene conjugiert ist, welche diese Gerade enthält, so folgt:

Die einander conjugierten Puncte, welche auf derselben Geraden liegen, bilden eine Involution, deren Doppelpuncte die sich selbstconjugierten Elemente, also die Durchschnittspuncte der Geraden mit der Ordnungsfläche des Polarsystems, sind.

Die einander conjugierten Ebenen, welche durch dieselbe Gerade gehen, bilden einen involutorischen Ebenenbüschel, dessen Doppelenen die sich selbstconjugierten Elemente, also die Berührungsebenen der Ordnungsfläche des Polarsystems, sind.

Somit:

Je zwei conjugierte Puncte werden durch die Ordnungsfläche harmonisch getrennt.

Je zwei conjugierte Ebenen werden durch die Ordnungsfläche harmonisch getrennt.

Oder mit anderen Worten:

Jeder Punct wird von seiner Polarebene durch die Ordnungsfläche harmonisch getrennt.

Jede Ebene wird von ihrem Pol durch die Ordnungsfläche harmonisch getrennt.

Zu dem nämlichen Ergebnisse gelangen wir auch in folgender Weise. Bezeichnen wir mit y_1, y_2, y_3, y_4 laufende Coordinaten, so hat der Punct $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die Polarebene

$$\sum_{ik} a_{ik} \xi_i y_k = 0. \quad (1.)$$

Ist $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ ein Punct der Fläche, so berührt seine Polarebene die Fläche in ihm, also stellt unter dieser Voraussetzung die obige Gleichung die Berührungsebene im Puncte $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die Fläche dar. Ist dieser Punct kein Punct der Fläche, so wird eine durch ihn gezogene Gerade die Fläche im Allgemeinen in zwei Puncten schneiden. Denken wir uns die Gerade als Verbindungslinie des Punctes $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ mit dem Puncte y_1, y_2, y_3, y_4 seiner

Polarebene, so werden die Coordinaten des Durchschnittspunctes dieser Geraden mit der Fläche die Form haben $x_i = \lambda \xi_i + \mu y_i$. Hierin sind λ und μ aus der Bedingung zu bestimmen, daß die Coordinaten des Punctes die Gleichung $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ befriedigen sollen. Substituieren wir sie hierin, so erübrigt wegen (1.) zur Bestimmung von λ und μ die Gleichung

$$\lambda^2 \sum_{ik} a_{ik} \xi_i \xi_k + \mu^2 \sum_{ik} a_{ik} y_i y_k = 0,$$

woraus sich für $\frac{\lambda}{\mu}$ die beiden Werte $\pm \sqrt{-\frac{\sum_{ik} a_{ik} y_i y_k}{\sum_{ik} a_{ik} \xi_i \xi_k}}$ ergeben.

Dieselben lehren, daß die Gerade die Fläche in zwei Puncten schneidet, welche den Pol vom Durchschnittspuncte mit der Polarebene harmonisch trennen.

Mittelst des Gesetzes der Reciprocität folgt hieraus wie oben:

Legt man aus einer Geraden einer Ebene Tangentialebenen an die Fläche, so trennen dieselben die Ebene harmonisch von ihrem Pol.

Ist in dem obigen Ausdrücke

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm \sqrt{-\frac{\sum_{ik} a_{ik} y_i y_k}{\sum_{ik} a_{ik} \xi_i \xi_k}}$$

$\sum_{ik} a_{ik} y_i y_k = 0$, sind also y_1, y_2, y_3, y_4 die Coordinaten eines Durchschnittspunctes der Polarebene mit der Fläche, so wird $\lambda = 0$ und somit $x_i = \mu y_i$, d. h. die beiden Durchschnittspuncte der Geraden mit der Fläche fallen in einen einzigen zusammen und es berührt daher die Gerade die Fläche. Somit:

Die Berührungspuncte sämtlicher Tangenten, die von einem Puncte an eine Fläche der zweiten Ordnung gelegt werden können, liegen in der Polarebene dieses Punctes.

Hieraus folgt reciprok:

Die Berührungsebenen, welche längs einer ebenen Curve an eine Fläche der zweiten Ordnung gelegt werden, schneiden sich im Pole dieser Ebene.

Die gewonnenen Sätze zeigen klar, daß die in diesem Paragraphen definierten Gebilde unabhängig sind von der Auffassung der Fläche der zweiten Ordnung als Ordnungsfläche eines Polarsystems, und daß sie mit dieser aus ihren eben entwickelten Eigenschaften construirt und daher auch definiert werden können. Sie werden also auch für die Fläche der zweiten Ordnung gelten, die nicht als Ordnungsfläche eines Polarsystems dargestellt werden kann, für die Kegel- fläche, wie dies die Entwicklungen des § 84, 1b unmittelbar zeigen.

Die Kegelfläche erschien dort als die Ordnungsfläche eines involutorischen Bündels. Die einem Strahle des Bündels conjugiert involutorische Ebene stellt sich als die Polarebene jedes Punctes dieses Strahles dar, indem, ganz in derselben Weise wie oben, bewiesen werden kann, daß dieser Strahl und die zugeordnete Ebene durch die Kegelfläche harmonisch getrennt werden. Somit besitzt jede Gerade einen Strahl des involutorischen Bündels zur Polaren, die Durchschnittslinie der Polarebene zweier ihrer Puncte.

§ 87.

Fortsetzung.

Es sollen nunmehr die eben entwickelten Begriffe und Sätze auf die unendlich fernen Elemente des durch eine Fläche der zweiten Ordnung bestimmten Polarsystems angewendet werden.

Es ergiebt sich auf diese Weise: Die Halbierungspuncte eines Systems paralleler Sehnen, welche in irgend einer Richtung in einer Fläche der zweiten Ordnung gezogen werden können, liegen in einer Ebene, welche eine Durchmesserenebene der Fläche genannt wird; sie enthält auch die Berührungspuncte aller Tangenten und Berührungsebenen, welche in der gegebenen Richtung an die Fläche gelegt werden können.

Die Durchmesserenebene ist nämlich die Polare des unendlich fernen Punctes, welcher in der gegebenen Richtung liegt.

Wird eine Fläche zweiter Ordnung von einem System paralleler Ebenen geschnitten, so liegen die Mittelpuncte der Schnittcurven auf einer Geraden, welche ein Durchmesser der Fläche genannt wird. Der Durchmesser ist nämlich die Polare der unendlich fernen Geraden, in welcher die parallelen Ebenen sich schneiden.

Sämtliche Durchmesser und Durchmesserenebenen einer Fläche zweiter Ordnung schneiden sich in einem Puncte, welcher der Mittelpunkt der Fläche genannt wird.

Der Punct ist der Pol der unendlich fernen Ebene, in welcher die Polaren aller Durchmesser und Durchmesserenebenen enthalten sind. Beim Kegel ist die Spitze der Mittelpunkt, da die Polarebenen aller Puncte bezüglich des Kegels durch seine Spitze gehen; jeder Strahl und jede Ebene, welche durch dieselbe gezogen werden, können respective als Durchmesser und Durchmesserenebene der Kegelfläche angesehen werden.

Jede Sehne, welche durch den Mittelpunkt gezogen wird, wird in demselben halbiert. Denn der Mittelpunkt wird durch die Fläche von der unendlich fernen Ebene, seiner Polarebene, harmonisch getrennt.

Der Mittelpunkt einer Fläche der zweiten Ordnung ist zugleich der Mittelpunkt jeder Curve der zweiten Ordnung, die auf der Fläche liegt und deren Ebene durch den Mittelpunkt hindurchgeht.

Denn der Mittelpunkt ist jedem unendlich fernen Punkte oder Strahle conjugiert. Daher liegen auch die Halbierungspunkte jedes Systems paralleler Sehnen der Curve in einer Geraden, welche durch den Mittelpunkt hindurchgeht.

Jedem Durchmesser ist eine Durchmesserebene, sowie jeder in dieser Ebene liegende Durchmesser conjugiert. Die Ebene, die zwei Durchmesser verbindet, welche demselben dritten conjugiert sind, ist daher die diesem dritten Durchmesser conjugierte Durchmesser-ebene. Da eine Durchmesserebene alle ihrem conjugierten Durchmesser parallelen Sehnen halbiert, so sind also je zwei conjugierte Durchmesser der Fläche der zweiten Ordnung auch conjugierte Durchmesser der Curve, welche ihre Verbindungsebene auf der Fläche ausschneidet.

Im Allgemeinen steht der Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung nicht senkrecht auf seiner conjugierten Ebene; denn wenn jeder Durchmesser auf seiner conjugierten Ebene senkrecht stünde, so wäre jeder Durchmesserbüschel ein rechtwinkliger und folglich die Curve der zweiten Ordnung, in welcher die Fläche seine Ebene schneidet, ein Kreis. Es hätten also dann alle Punkte der Fläche von ihrem Mittelpunkte gleichen Abstand und die Fläche wäre daher eine Kugel. Es giebt aber im Allgemeinen bei einer Fläche des zweiten Grades drei Durchmesser, deren jeder auf seiner conjugierten Ebene senkrecht steht.

Wir überzeugen uns hiervon leicht in folgender Weise. Construieren wir zu jedem Durchmesser die auf ihn senkrechte Durchmesserebene, so ist der dadurch entstehende Ebenenbüschel zum Durchmesserbüschel reciprok. Da letzterer auch zum Bündel der conjugierten Durchmesserebenen reciprok ist, so sind die beiden Ebenenbüschel zu einander collinear.

Sollen diese beiden collinearen Bündel nicht zusammenfallen, in welchem Falle, wie eben bemerkt wurde, die Fläche eine Kugel ist, so können sie höchstens drei Doppelebenen besitzen, die nicht demselben Ebenenbüschel angehören, oder sie haben einen Ebenenbüschel gemeinsam; in jedem Falle aber besitzen sie mindestens eine reelle Doppelebene. Im Allgemeinen existieren also höchstens drei reelle Durchmesserebenen, deren jede auf ihrem conjugierten Durchmesser senkrecht ist und mindestens eine. Aus dieser letzteren Thatsache läßt sich nun leicht folgern, daß stets drei reelle Durchmesserebenen bestehen, deren jede auf ihrem conjugierten Durchmesser senkrecht ist. Denn die Axen des Kegelschnittes, in welchem die reelle Durch-

messerebene die Fläche schneidet, bestimmen mit dem conjugierten Durchmesser derselben zwei weitere Durchmesserbenen, deren jede auf ihrem conjugierten Durchmesser senkrecht steht.

Jeder dieser Durchmesser wird eine A x e der Fläche der zweiten Ordnung genannt. Somit:

Eine Fläche der zweiten Ordnung hat im Allgemeinen drei zu einander rechtwinklige Axen.

Ausnahmefälle treten ein, wenn der Kegelschnitt, dessen wir uns oben zur Construction der beiden anderen Axen mittelst der ersten Axe bedienten, ein Kreis oder eine Parabel wird. Ist er ein Kreis, so findet sich zu jedem Durchmesser des Kegelschnittes ein conjugierter zu diesem senkrechter. Es ist also dann jede Durchmesserbene, welche durch die schon gefundene Axe gelegt wird, senkrecht zu ihrem conjugierten Durchmesser. Die Fläche der zweiten Ordnung besitzt also in diesem Falle eine Axe, welche einen Büschel von Durchmesserbenen trägt, deren jede auf ihrem conjugierten Durchmesser senkrecht steht. Jede Ebene, welche der Ebene dieses Durchmesserbüschels parallel ist, schneidet die Fläche in einem Kreise, da in der Schnittcurve der zweiten Ordnung der Büschel conjugierter Durchmesser der Curve ein rechtwinkliger ist. Die Mittelpunkte aller dieser Kreise liegen auf jener Axe der Fläche der zweiten Ordnung.

Die Fläche ist also in diesem Falle eine Rotationsfläche der zweiten Ordnung und jene Axe die Rotationsaxe.

Ist der zur Axenconstruction benützte Kegelschnitt eine Parabel, so liegt sein Mittelpunkt und daher auch jener der Fläche in der unendlich fernen Ebene, und somit berührt diese Ebene, da sie durch ihren Pol geht, die Fläche.

Eine Fläche der zweiten Ordnung, welche die unendlich ferne Ebene berührt, wird ein Paraboloid genannt.

Im Paraboloid sind also sämtliche Durchmesser einander parallel.

Ein Paraboloid hat sonach nur eine Hauptaxe.

In derselben liegen die Mittelpunkte sämtlicher Kegelschnitte der Fläche, deren Ebene zur Richtung der Durchmesser senkrecht ist.

Wir haben hiernach drei Arten von Flächen der zweiten Ordnung unterscheiden gelernt: Flächen mit einem endlichen Mittelpunkte, Paraboloiden und Rotationsflächen.

Die Flächen mit einem endlichen Mittelpunkte werden nach ihrer Lage gegen die unendlich ferne Ebene wieder eingeteilt in: Ellipsoide und Hyperboloide.

Unter einem Ellipsoid wird eine Fläche der zweiten Ordnung

verstanden, welche mit der unendlich fernen Ebene keinen Punct gemeinsam hat.

Hyperboloid wird eine Fläche der zweiten Ordnung genannt, welche die unendlich ferne Ebene schneidet.

Mitten innen steht die Gattung der Paraboloid, welche die unendlich ferne Ebene berühren.

Die Hyperboloide und Paraboloid können offenbar auch geradlinige Flächen sein.

Das geradlinige Hyperboloid wird einfaches, das Hyperboloid, welches keine geraden Linien enthält, zweifaches oder zweischaliges Hyperboloid genannt. Das geradlinige Paraboloid heißt hyperbolisches und dasjenige, welches keine Geraden enthält, elliptisches Paraboloid.

Eine Abart des einfachen Hyperboloids ist endlich die Kegelfläche, deren Spitze gleichzeitig ihr Mittelpunkt ist.

§ 88.

Das Nullsystem.

Die beiden quadratischen Formen, § 84, die gleich Null gesetzt das Erzeugnis der beiden reciproken Systeme darstellen, verschwinden identisch, wenn $a_{ik} = -a_{ki}$ und $a_{ii} = 0$, also die Determinante $\Sigma \pm a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ eine schief symmetrische ist. Die reciproke Beziehung der beiden Systeme wird somit durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= * a_{12} u_2 + a_{13} u_3 + a_{14} u_4 \\ \varrho x_2 &= -a_{12} u_1 + * + a_{23} u_3 + a_{24} u_4 \\ \varrho x_3 &= -a_{13} u_1 + a_{23} u_2 + * + a_{34} u_4 \\ \varrho x_4 &= -a_{14} u_1 + a_{24} u_2 - a_{34} u_3 + *, \end{aligned}$$

wo x_1, x_2, x_3, x_4 die Coordinaten eines Punctes des ersten und u_1, u_2, u_3, u_4 die Coordinaten der entsprechenden Ebene des zweiten Systems bezeichnen. Sind nun $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die Coordinaten eines Punctes des zweiten, und v_1, v_2, v_3, v_4 die der entsprechenden Ebene des ersten Systems, so hängen dieselben, § 84, durch die Gleichungen mit einander zusammen:

$$\begin{aligned} \varrho \xi_1 &= * a_{12} v_2 + a_{13} v_3 + a_{14} v_4 \\ \varrho \xi_2 &= -a_{12} v_1 + * + a_{23} v_3 + a_{24} v_4 \\ \varrho \xi_3 &= -a_{13} v_1 + a_{23} v_2 + * + a_{34} v_4 \\ \varrho \xi_4 &= -a_{14} v_1 - a_{24} v_2 - a_{34} v_3 + *. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lehren, daß unter den gemachten Voraussetzungen jeder Punct in seiner entsprechenden Ebene liegt und jedem Puncte stets ein und dieselbe Ebene, sowie daß jeder Ebene stets derselbe

Punct entspricht. Die beiden reciproken Systeme bilden somit in diesem Falle ein eigenartiges Polarsystem, in welchem jede Ebene durch ihren Pol geht und jeder Punct in seiner Polarebene liegt. Ein derartiges Polarsystem wird ein Nullsystem genannt.

Aus dem Begriffe des Nullsystems folgt unmittelbar, daß jede Gerade, welche von einem Puncte aus in dessen Polarebene gezogen wird, mit ihrer Polare zusammenfällt. Denn die Polarebene jedes Punctes dieser Geraden geht wieder durch die Gerade. Somit:

„Die Strahlen jedes Strahlenbüschels, der in der Polarebene seines Mittelpunctes liegt, sind sich selbst entsprechende Geraden des Nullsystems. Jede Gerade, welche mit ihrer Polare in einer Ebene liegt, fällt mit derselben zusammen.“

Die obigen Gleichungen lassen nun unmittelbar erkennen, daß die sämtlichen sich selbst entsprechenden Geraden des Nullsystems einen linearen Complex bilden.

Sind nämlich u_1, u_2, u_3, u_4 die Coordinaten einer Ebene, so geht die Gleichung der Ebene

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 = 0$$

durch die Relation

$$\sigma u_i = \sum_k A_{ik} x_k$$

wegen $A_{ik} = -A_{ki}$, $A_{ii} = 0$ über in

$$A_{12} p_{12} + A_{13} p_{13} + A_{14} p_{14} + A_{23} p_{23} + A_{24} p_{24} + A_{34} p_{34} = 0, \quad (1.)$$

wo $p_{ik} = y_i x_k - x_k y_i$ gesetzt wurde.

Die p_{ik} sind also die Liniencoordinaten eines Strahles, welcher in der betreffenden Ebene liegt und zugleich durch ihren Pol geht.

Die sämtlichen Strahlen eines Nullsystems, deren jeder in der Polarebene eines seiner Puncte liegt, bilden einen linearen Complex.

Zu dem gleichen Resultate gelangen wir durch die reciproke Betrachtung.

Wir finden, daß die Axen, welche durch einen Punct gehen und zugleich in der diesem Puncte entsprechenden Ebene liegen, der Gleichung genügen

$$a_{12} q_{12} + a_{13} q_{13} + a_{14} q_{14} + a_{23} q_{23} + a_{24} q_{24} + a_{34} q_{34} = 0, \quad (2.)$$

wo $q_{ik} = v_i u_k - u_i v_k$. Es stellt also diese Gleichung in Axencoordinaten denselben linearen Complex dar.

Die Gleichungen (1.) und (2.) zeigen auch, daß jedem linearen Complex ein Nullsystem beigeordnet ist, und lehren die Beziehungsgleichungen zwischen seinen Puncten und Ebenen aus den Coefficienten der Complexgleichung herstellen.

So sind sämtliche Geraden, welche zwei Polaren des Nullsystems schneiden, Strahlen dieses Complexes, da jede dieser Geraden in der Polarebene jedes der beiden Durchschnittspunkte mit den Polaren enthalten ist.

Aus dieser Darstellung des linearen Complexes als Teil des Nullsystems können einige Eigenschaften desselben aus den allgemeinen Eigenschaften des Polarsystems abgeleitet werden.

Nennen wir alle Geraden und Ebenen im Nullsysteme, deren Polaren und Pole in der unendlich fernen Ebene liegen, Durchmesser und Durchmesserebenen, so erhalten wir den Satz:

„Die Durchmesser des Nullsystems sind zu einander und zu den Durchmesserebenen parallel.“

Sie gehen nämlich alle durch den Pol der unendlich fernen Ebene.

„Alle in einer solchen Durchmesserebene liegenden Strahlen des Complexes sind somit zu einander parallel.“

„Jede Ebene, welche zwei Polaren des Nullsystems parallel ist, ist eine Durchmesserebene desselben.“

Die Pole paralleler Ebenen des Nullsystems liegen in einem Durchmesser, da sich die parallelen Ebenen in einer unendlich fernen Geraden schneiden. Derjenige Durchmesser, welcher die Pole der zur Richtung der Durchmesser senkrechten Ebene enthält, wird die Axe sowohl des Nullsystems als seines Complexes genannt.

Diese Axe steht somit senkrecht auf jedem Strahle des Complexes, der sie schneidet; sie steht auch senkrecht auf dem kürzesten Abstände je zweier Polaren des Nullsystems, da deren Ebene der Richtung der Durchmesser parallel ist.

Dem ebenen Systeme Σ , das in einer zur Axe senkrechten Ebene liegt, ist im Nullsysteme ein Strahlenbündel S reciprok zugeordnet, dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt O des ebenen Systems mit der Axe ist. Dieser Strahlenbündel projiciert in jeder Ebene, die senkrecht zur Axe des Nullsystems steht, ein Σ reciprokes System Σ' .

Um nun zu irgend einem Punkte P von Σ die entsprechende Gerade p in Σ' zu finden, haben wir den Durchschnitt der P entsprechenden Ebene des Nullsystems mit Σ' zu bestimmen. Da nun diese Ebene durch OP hindurchgeht, so ist $p \parallel OP$. Es entsprechen somit den Punkten einer Punctreihe, die in Σ auf einem Strahle des Strahlenbüschels O liegen, in Σ' zu OP parallele Gerade; und umgekehrt entspricht jedem Parallelstrahlenbüschel von Σ in Σ' eine Punctreihe, deren Träger die Axe des Nullsystems schneidet und den Strahlen des Parallelstrahlenbüschels parallel ist. Der Träger dieser Punctreihe ist nämlich die Gerade, welche in Σ' dem unendlich fernen Mittelpunkte des Parallelstrahlenbüschels entspricht, und schneidet so-

mit die Axe. Hieraus folgt, daß den Ecken und Seiten eines Parallelogramms von Σ in Σ' respective die Seiten und Ecken eines Parallelogramms entsprechen. Und umgekehrt.

Je zwei Punkten von Σ , die symmetrisch zu O liegen, entsprechen in Σ' zwei Gerade, die symmetrisch zum Fußpunkte O' der Axe liegen, und umgekehrt. Denn die beiden Punkte in Σ werden durch O und die unendlich ferne Gerade von Σ harmonisch getrennt. Da nun der unendlich fernen Geraden von Σ in Σ' der Punkt O' und dem Punkte O von Σ in Σ' die unendlich ferne Gerade von Σ' entspricht, so werden die beiden den Punkten von Σ entsprechenden Geraden durch O' und die unendlich ferne Gerade von Σ' harmonisch getrennt. Aus diesen Beziehungen folgt unmittelbar:

Den Seiten und Ecken eines Quadrates von Σ , dessen Mittelpunkt in der Axe liegt, entsprechen in Σ' resp. die Ecken und Seiten eines Quadrates, dessen Mittelpunkt ebenfalls in der Axe liegt.

Somit umhüllen die Geraden von Σ' , welche den Punkten eines Kreises k von Σ entsprechen, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt, ebenfalls einen Kreis, dessen Mittelpunkt sich in der Axe befindet. Da nun dieser Kreis von sämtlichen Ebenen des Ebenenbüschels der zweiten Ordnung, die den Punkten des Kreises k im Nullsysteme entsprechen, berührt wird, so ersehen wir hieraus:

„Im Nullsysteme umhüllen die Polarebenen der Punkte eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf der Axe liegt und dessen Ebene auf ihr senkrecht ist, einen geraden Kegel, welcher die Axe des Nullsystems zur Axe hat.“

Dreht sich also ein Punkt samt seiner Polarebene um die Axe des Nullsystems, so beschreibt der Punkt einen Kreis und die Ebene umhüllt die dem Kreise zugehörige Kegelfläche: sie bleibt also während dieser ganzen Bewegung die Polarebene des Punktes. Daraus folgt:

Das Nullsystem und der Strahlencomplex ändern sich nicht durch eine Drehung um die Axe.

Aus dem früher bewiesenen Satze, daß alle in einer Durchmesser-ebene gelegenen Complexstrahlen parallel sind, folgt überdies:

Das Nullsystem und der lineare Strahlencomplex ändern sich nicht, wenn sie in der Richtung der Axe verschoben werden.

Beide Sätze können wir in den einen zusammenfassen:

Das Nullsystem und der lineare Strahlencomplex bleiben ungeändert bei einer Schraubenbewegung um die Axe.

Dreizehntss Capitel.

Die lineare Substitution und Coordinaten-Transformation.

§ 89.

Im vorhergehenden Capitel fanden wir, daß die Coordinaten entsprechender Punkte zweier collinearer räumlicher Systeme durch Gleichungen von der Form

$$\left. \begin{aligned} \varrho x_1 &= a_{11} \xi_1 + a_{12} \xi_2 + a_{13} \xi_3 + a_{14} \xi_4 \\ \varrho x_2 &= a_{21} \xi_1 + a_{22} \xi_2 + a_{23} \xi_3 + a_{24} \xi_4 \\ \varrho x_3 &= a_{31} \xi_1 + a_{32} \xi_2 + a_{33} \xi_3 + a_{34} \xi_4 \\ \varrho x_4 &= a_{41} \xi_1 + a_{42} \xi_2 + a_{43} \xi_3 + a_{44} \xi_4 \end{aligned} \right\} \quad (1.)$$

verbunden werden, woraus die Gleichungen sich ergaben, welche die Coordinaten entsprechender Ebenen verknüpfen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma u_1 &= a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + a_{31} v_3 + a_{41} v_4 \\ \sigma u_2 &= a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + a_{32} v_3 + a_{42} v_4 \\ \sigma u_3 &= a_{13} v_1 + a_{23} v_2 + a_{33} v_3 + a_{43} v_4 \\ \sigma u_4 &= a_{14} v_1 + a_{24} v_2 + a_{34} v_3 + a_{44} v_4 \end{aligned} \right\} \quad (2.)$$

Diese Gleichungen erhalten eine wesentlich andere Bedeutung, wenn im ersten Gleichungssysteme die x und ξ denselben Punct, und im zweiten die u und v dieselbe Ebene repräsentieren. Das erste Gleichungssystem transformiert dann die x - in die ξ -Variablen, oder wie man sich auch ausdrückt, substituirt für die x - die ξ -Variablen. Die Operation, vermöge welcher die neuen Variablen ξ eingeführt werden, wird, weil die zu Grunde gelegten Gleichungen (1.) linear sind, eine lineare Substitution genannt, doch bezeichnet man damit auch wohl die Formeln (1.) selbst. Die Coefficienten a derselben heissen die Substitutions-Coefficienten, und die aus ihnen gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

die Substitutions-Determinante. Dieselbe darf offenbar nicht verschwinden, da sonst zwischen den als unabhängig von einander vor-

ausgesetzten Größen x eine Relation hergestellt würde und die Gleichungen (1.) nach den ξ nicht auflösbar wären.

Die durch das zweite Gleichungssystem angegebene Substitution steht zu der ersten in der Beziehung, welche durch den Namen der transponierten Substitution gekennzeichnet wird. Diese Transposition eines Substitutionssystems besteht darin, daß in dem ursprünglichen Substitutionssysteme die gleichvielten Zeilen und Columnen mit einander und — im vorliegenden Falle — die x - durch die neuen und die ξ -Coordinaten durch die ursprünglichen Ebenencoordinaten ersetzt werden. In der That sind die u Coordinaten einer Ebene des x -Systems und die v jene einer Ebene des ξ -Systems.

Durch Auflösung der obigen Gleichungen fließen unmittelbar die inversen Substitutionen

$$\left. \begin{aligned} \varrho \xi_1 &= A_{11} x_1 + A_{21} x_2 + A_{31} x_3 + A_{41} x_4 \\ \varrho \xi_2 &= A_{12} x_1 + A_{22} x_2 + A_{32} x_3 + A_{42} x_4 \\ \varrho \xi_3 &= A_{13} x_1 + A_{23} x_2 + A_{33} x_3 + A_{43} x_4 \\ \varrho \xi_4 &= A_{14} x_1 + A_{24} x_2 + A_{34} x_3 + A_{44} x_4 \end{aligned} \right\} \quad (3.)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \sigma u_1 &= A_{11} v_1 + A_{12} v_2 + A_{13} v_3 + A_{14} v_4 \\ \sigma u_2 &= A_{21} v_1 + A_{22} v_2 + A_{23} v_3 + A_{24} v_4 \\ \sigma u_3 &= A_{31} v_1 + A_{32} v_2 + A_{33} v_3 + A_{34} v_4 \\ \sigma u_4 &= A_{41} v_1 + A_{42} v_2 + A_{43} v_3 + A_{44} v_4 \end{aligned} \right\}, \quad (4.)$$

wo A_{ik} die Subdeterminante des Elementes a_{ik} in $\Sigma \pm a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ bezeichnet. Um die geometrische Bedeutung der in den obigen Substitutions-Gleichungen auftretenden Substitutions-Coefficienten zu eruieren, setzen wir in dem Gleichungssysteme (1.) $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$, wodurch wir für die ursprünglichen Coordinaten dieses Punctes erhalten

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a_{11} : a_{21} : a_{31} : a_{41}.$$

Für $\xi_1 = \xi_3 = \xi_4 = 0$ finden wir

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a_{12} : a_{22} : a_{32} : a_{42},$$

für $\xi_1 = \xi_2 = \xi_4 = 0$

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a_{13} : a_{23} : a_{33} : a_{43},$$

endlich für $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a_{14} : a_{24} : a_{34} : a_{44}.$$

Die neuen Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ eines Punctes erscheinen somit unter den gemachten Voraussetzungen, bezogen auf ein neues Tetraeder als Fundamentaltetraeder, dessen Ecken bezüglich des ursprünglichen Fundamentaltetraeders die Coordinaten besitzen:

$$\begin{array}{cccc}
 a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\
 a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\
 a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\
 a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}.
 \end{array}$$

Für die Coordinaten der Seitenebenen dieses Tetraeders, bezogen auf das ursprüngliche Fundamentaltetraeder, ergeben sich aus (4.) die Werte

$$\begin{array}{cccc}
 A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & A_{14} \\
 A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, & A_{24} \\
 A_{31}, & A_{32}, & A_{33}, & A_{34} \\
 A_{41}, & A_{42}, & A_{43}, & A_{44}.
 \end{array}$$

Ebenso erkennen wir aus (3.) und (4.), daß bezüglich des neuen Fundamental-Tetraeders die Coordinaten der alten Tetraeder-

Ecken				Seiten			
$A_{11},$	$A_{21},$	$A_{31},$	A_{41}	$a_{11},$	$a_{21},$	$a_{31},$	a_{41}
$A_{12},$	$A_{22},$	$A_{32},$	A_{42}	$a_{12},$	$a_{22},$	$a_{32},$	a_{42}
$A_{13},$	$A_{23},$	$A_{33},$	A_{43}	$a_{13},$	$a_{23},$	$a_{33},$	a_{43}
$A_{14},$	$A_{24},$	$A_{34},$	A_{44}	$a_{14},$	$a_{24},$	$a_{34},$	a_{44}

sind.

Es drücken somit die linearen Substitutions-Gleichungen (1.) die Punctcoordinaten, bezogen auf das ursprüngliche Fundamentaltetraeder durch die bezüglich eines neuen und die transponierte Substitution die Ebenencoordinaten bezüglich des neuen Tetraeders durch jene bezüglich des ursprünglichen aus. Es wird aber auch umgekehrt der Übergang von den Punctcoordinaten bezüglich eines Tetraeders zu denen bezüglich eines neuen Tetraeders durch eine lineare Substitution bewerkstelligt, während die transponierte Substitution die neuen Ebenencoordinaten in die ursprünglichen zurückführt.

§ 90.

Diese Behauptung leuchtet unmittelbar ein, wenn wir auf die Formeln zurückgehen, welche die homogenen durch die rechtwinkligen Coordinaten ausdrücken.

Sind x, y, z die rechtwinkligen und x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten eines Punctes, so hängen dieselben mit einander zusammen durch die Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l}
 \varrho x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\
 \varrho x_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\
 \varrho x_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \\
 \varrho x_4 = a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4
 \end{array} \right\} \quad (3.)$$

Die Ebenencoordinaten u, v, w einer Ebene hinwiederum sind mit ihren homogenen u_1, v_2, u_3, u_4 durch die Gleichungen verbunden:

$$\left. \begin{aligned} \sigma u_1 &= A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 \\ \sigma u_2 &= A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2 \\ \sigma u_3 &= A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3 \\ \sigma u_4 &= A_4 u + B_4 v + C_4 w + D_4 \end{aligned} \right\}, \quad (6.)$$

wenn wir die Subdeterminante irgend eines Elementes der Determinante $\Sigma \pm a_1, b_2, c_3, d_4$ mit demselben Index und denselben Buchstaben des grossen Alphabets bezeichnen.

Aus den obigen Gleichungssystemen ergibt sich wieder:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4}{D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4} \\ y &= \frac{B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + B_4 x_4}{D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4} \\ z &= \frac{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + C_4 x_4}{D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u &= \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4}{d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4} \\ v &= \frac{b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 + b_4 u_4}{d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4} \\ w &= \frac{c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4}{d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4} \end{aligned} \cdot (7.)$$

Sind somit $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die Coordinaten irgend eines Punctes, bezogen auf ein zweites Tetraeder als Fundamental-Tetraeder, x_1, x_2, x_3, x_4 , dessen Coordinaten bezüglich des ersten Fundamental-Tetraeders und x, y, z seine rechtwinkligen Coordinaten, so erhalten wir die Beziehung zwischen den homogenen x - und ξ -Coordinaten dieses Punctes, indem wir in den Formeln, welche die $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ausdrücken, für letztere ihre Werte aus (7.) substituieren. Es wird also, wie behauptet wurde, die Beziehung zwischen den homogenen x - und ξ -Coordinaten durch vier Gleichungen von der Form (1.) ausgedrückt, und es besteht somit die Transformation der Punctcoordinaten von einem Fundamental-tetraeder auf ein anderes in einer linearen Substitution, deren Coefficienten die im vorhergehenden Paragraphen ausgeführte Bedeutung haben. Der Übergang von den Ebenencoordinaten des ursprünglichen zu denen des neuen Tetraedersystems wird, wie aus

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 \\ \equiv v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 + v_4 \xi_4 \end{aligned}$$

hervorgeht, durch die transponierte Substitution bewerkstelligt.

Aus den Formeln zur Transformation der Punct- und Ebenencoordinaten ergeben sich auch die Ausdrücke zur Transformation der Liniencoordinaten. Sind x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3, y_4 die ursprünglichen Coordinaten zweier Puncte, und bezüglich $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ und $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ deren neue Coordinaten, so geht vermöge (1.) der Ausdruck $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ über in

$$\begin{aligned} \omega p_{ik} &= \pi_{12}(a_{i1}a_{k2} - a_{i2}a_{k1}) + \pi_{23}(a_{i2}a_{k3} - a_{i3}a_{k2}) + \pi_{31}(a_{i3}a_{k1} - a_{i1}a_{k3}) \\ &+ \pi_{14}(a_{i1}a_{k4} - a_{i4}a_{k1}) + \pi_{24}(a_{i2}a_{k4} - a_{i4}a_{k2}) + \pi_{34}(a_{i3}a_{k4} - a_{i4}a_{k3}), \end{aligned}$$

wo ω einen Proportionalitätsfactor und $\pi_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i$ ist. Indem wir i und k alle Combinationen ohne Wiederholung zur zweiten Classe der Zahlen 1 bis 4 annehmen lassen, erhalten wir die Formeln zur Transformation der Coordinaten eines Strahles. Sie bilden wieder eine lineare Substitution und die Substitutionscoefficienten sind offenbar die Coordinaten der Kanten des Fundamental-Tetraeders in Bezug auf das alte. Denn setzen wir z. B. in diesen Gleichungen $\xi_3 = \xi_4 = 0$, so erhalten wir als die Liniencoordinaten dieser Kante in Bezug auf das alte Fundamental-Tetraeder:

$$\begin{aligned} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}); & \quad (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31}); & \quad (a_{11} a_{42} - a_{12} a_{41}); \\ (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}); & \quad (a_{21} a_{42} - a_{22} a_{41}); & \quad (a_{31} a_{42} - a_{32} a_{41}); \end{aligned}$$

u. s. f.

In derselben Weise können wir aus den Gleichungen (2.) und (4.) die Formeln zur Transformation der Axencoordinaten ableiten.

§ 91.

Transformation der Parallelkoordinaten.

Aus den Formeln, welche zur Übertragung der rechtwinkligen in Tetraedercoordinaten dienen, erhalten wir unmittelbar die Gleichungen zur Transformation der rechtwinkligen in beliebige Parallelcoordinaten, wenn wir (§ 34) als die eine Seitenfläche des Tetraeders die unendlich ferne Ebene annehmen. Bezeichnen wir demnach mit X, Y, Z die neuen Parallelcoordinaten eines Punctes, und mit x, y, z dessen rechtwinklige Coordinaten, so erhalten wir die gesuchten Formeln, indem wir in (5.)

$$\frac{x_1}{x_4} = X, \quad \frac{x_2}{x_4} = Y, \quad \frac{x_3}{x_4} = Z, \quad a_4 = b_4 = c_4 = 0; \quad d_4 = 1$$

setzen. Wir finden so:

$$\left. \begin{aligned} X &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ Y &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ Z &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \end{aligned} \right\} \quad (8.)$$

In analoger Weise ergibt sich der Zusammenhang der ursprünglichen Coordinaten u, v, w einer Ebene mit deren neuen Coordinaten U, V, W , wenn wir in (7.) $a_4 = b_4 = c_4 = 0$ und $d_4 = 1$,

$$\frac{u_1}{u_4} = U, \quad \frac{u_2}{u_4} = V, \quad \frac{u_3}{u_4} = W$$

setzen; wir gelangen so zu den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{a_1 U + a_2 V + a_3 W}{d_1 U + d_2 V + d_3 W + 1} \\ v &= \frac{b_1 U + b_2 V + b_3 W}{d_1 U + d_2 V + d_3 W + 1} \\ w &= \frac{c_1 U + c_2 V + c_3 W}{d_1 U + d_2 V + d_3 W + 1} \end{aligned} \right\}. \quad (9.)$$

Wie die Gleichungen (8.) den Übergang von den Punctcoordinaten eines rechtwinkligen Systems zu einem beliebigen Parallelcoordinaten-Systeme vermitteln, so dienen ebenso gebildete Gleichungen mit veränderten Coefficienten zur Transformation von rechtwinkligen in ein beliebiges anderes Parallelcoordinaten-System. Setzen wir nun in diesen beiden Systemen von Transformationsgleichungen die Ausdrücke für x , y und z einander gleich; so erhalten wir drei lineare Gleichungen zum Übergang von dem einen zu dem anderen Parallelcoordinaten-Systeme. Aus den Auflösungen dieser Gleichungen nach den Coordinaten desselben Systems gehen wieder Gleichungen der Form (8.) hervor. Dieselben Überlegungen lassen sich bezüglich der Ebenencoordinaten anstellen und wir gelangen zur Erkenntnis, daß die Transformation der Coordinaten eines Parallelcoordinaten-Systems in ein anderes durch Gleichungen von der Form (8.) und (9.) bewerkstelligt wird. Wir wollen nun vorerst den allgemeinen Fall voraussetzen, die Gleichungen (8.) seien die Transformationsformeln von einem schiefwinkligen Coordinatensysteme in ein beliebiges anderes schiefwinkliges Coordinatensystem und wollen unter dieser Annahme die Bedeutung der zwölf in (8.) auftretenden Constanten zu ermitteln suchen.

Zu diesem Behufe setzen wir zunächst $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, wodurch wir für die Coordinaten des Anfangspunctes des Systems x , y , z in dem Systeme X , Y , Z erhalten $x = d_1$, $y = d_2$, $z = d_3$. Es bedeuten also die Constanten d_1 , d_2 , d_3 in (8.) die Coordinaten des Anfangspunctes des Systemes x , y , z im anderen Systeme.

Setzen wir nun für $X - d_1$, $Y - d_2$, $Z - d_3$ bezüglich X , Y , Z , so verlegen wir hiermit nur den Anfangspunct des Systemes XYZ in den Ursprung des Coordinatensystems $x y z$, während wir die Richtungen seiner Axen ungeändert lassen. Durch diese Veränderung des Anfangspunctes gehen die Gleichungen (8.) über in

$$\left. \begin{aligned} X &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ Y &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ Z &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned} \right\}. \quad (10.)$$

Es dienen also diese Formeln zur Transformation der Coordinaten eines Parallelcoordinaten-Systemes in die eines beliebigen anderen Parallelcoordinaten-Systemes mit demselben Anfangspuncte.

Um die geometrische Bedeutung der in den Gleichungen (10.) vorkommenden neun Constanten zu ermitteln, welche dieselben sind wie in den Gleichungen (8.), bestimmen wir die Coordinaten irgend eines Punctes in der x -Axe des Systems $x y z$. Fällten wir von demselben Senkrechte auf die (XY) -, (XZ) - und (YZ) -Ebene und bezeichnen die Winkel, welche die x -Axe mit diesen Ebenen bildet, bezüglich mit (x, XY) , (x, XZ) , (x, YZ) , so sind die Senkrechten respective gleich:

$$x \sin (x, XY); \quad x \sin (x, XZ); \quad x \sin (x, YZ).$$

Ziehen wir durch den Punct x , $y = 0$, $z = 0$ Parallele zur X -, Y - und Z -Axe, so sind diese Parallelen bezüglich die X -, Y - und Z -Coordinate dieses Punctes und wir erhalten daher für die obigen Senkrechten andererseits die Ausdrücke

$$Z \sin (Z, XY); \quad Y \sin (Y, XZ); \quad X \sin (X, YZ).$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke ergibt für den betreffenden Punct

$$\frac{X}{x} = \frac{\sin (x, YZ)}{\sin (X, YZ)}; \quad \frac{Y}{x} = \frac{\sin (x, XZ)}{\sin (Y, XZ)}; \quad \frac{Z}{x} = \frac{\sin (x, XY)}{\sin (Z, XY)}.$$

Da aber für diesen Punct $y = z = 0$ ist, so erhalten wir aus (10.)

$$\frac{X}{x} = a_1; \quad \frac{Y}{x} = a_2; \quad \frac{Z}{x} = a_3,$$

es ist daher

$$a_1 = \frac{\sin (x, YZ)}{\sin (X, YZ)}; \quad a_2 = \frac{\sin (x, XZ)}{\sin (Y, XZ)}; \quad a_3 = \frac{\sin (x, XY)}{\sin (Z, XY)}.$$

Wir finden demnach, daß die neun Coefficienten in (8.) oder (10.) die folgende geometrische Bedeutung haben:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{\sin (x, YZ)}{\sin (X, YZ)}; & a_2 &= \frac{\sin (x, XZ)}{\sin (Y, XZ)}; & a_3 &= \frac{\sin (x, XY)}{\sin (Z, XY)} \\ b_1 &= \frac{\sin (y, YZ)}{\sin (X, YZ)}; & b_2 &= \frac{\sin (y, XZ)}{\sin (Y, XZ)}; & b_3 &= \frac{\sin (y, XY)}{\sin (Z, XY)} \\ c_1 &= \frac{\sin (z, YZ)}{\sin (X, YZ)}; & c_2 &= \frac{\sin (z, XZ)}{\sin (Y, XZ)}; & c_3 &= \frac{\sin (z, XY)}{\sin (Z, XY)} \end{aligned} \right\} \cdot (11.)$$

Aus diesen Formeln ergibt sich für den Fall, daß das Coordinatensystem XYZ rechtwinklig ist,

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \cos (x, X); & a_2 &= \cos (x, Y); & a_3 &= \cos (x, Z) \\ b_1 &= \cos (y, X); & b_2 &= \cos (y, Y); & b_3 &= \cos (y, Z) \\ c_1 &= \cos (z, X); & c_2 &= \cos (z, Y); & c_3 &= \cos (z, Z) \end{aligned} \right\}; (11')$$

die neun Constanten sind dann nicht mehr von einander unabhängig, denn es bestehen zwischen denselben nach § 3 die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 0 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 0 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (12.)$$

Ferner ergibt sich unmittelbar:

$$\left. \begin{aligned} \cos(xy) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ \cos(xz) &= a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ \cos(yz) &= b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \end{aligned} \right\}. \quad (13.)$$

§ 92.

Transformation rechtwinkliger Coordinaten.

Ist auch das Coordinatensystem xyz rechtwinklig, so ergeben sich aufser den Abhängigkeiten des Gleichungssystems (12.):

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad (12.)$$

und aus (13.) die weiteren Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (14.)$$

Aus (11') folgen jedoch unter der gemachten Voraussetzung noch zwei Systeme von Gleichungen zwischen diesen neun Constanten, nämlich

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (15.)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 &= 0 \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (16.)$$

Diese neun Gleichungen zwischen den neun Substitutionscoefficienten sind jedoch keineswegs von einander unabhängig, sondern es läßt sich leicht zeigen, daß die Gleichungen (15.) und (16.) eine Folge der Relationen (12.) und (14.), sowie daß umgekehrt (12.) und (14.) eine Folge von (15.) und (16.) sind. Bezeichnen wir die Subdeterminante irgend eines Elementes der Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta$$

mit demselben aber großen Buchstaben und demselben Index, so ergeben sich aus (12.) und (14.) die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \Delta a_1, & B_1 &= \Delta b_1, & C_1 &= \Delta c_1 \\ A_2 &= \Delta a_2, & B_2 &= \Delta b_2, & C_2 &= \Delta c_2 \\ A_3 &= \Delta a_3, & B_3 &= \Delta b_3, & C_3 &= \Delta c_3 \end{aligned} \right\}. \quad (17.)$$

Die erste Relation finden wir, indem wir die erste Gleichung in (12.) mit A_1 , die erste in (14.) mit B_1 und die zweite mit C_1 multiplicieren und diese Gleichungen addieren.

Aus denselben Gleichungen gehen durch eine ähnliche Behandlung die drei Relationen der ersten Colonne von (17.) hervor. Aus der zweiten Gleichung des Gleichungssystemes (12.) in Verbindung mit der ersten und dritten Gleichung in (14.) erhalten wir auf dieselbe Weise die Relationen der zweiten Colonne in (17.), und endlich fließen aus der letzten Gleichung in (12.) und den beiden letzten in (14.) die Relationen der letzten Colonne in (17.).

Multiplicieren wir nun jede der Gleichungen (17.) mit demselben kleinen Buchstaben, der auf ihrer rechten Seite steht, so erhalten wir durch Addition der in derselben Zeile stehenden drei Gleichungen die Relationen (15.). Der bekannte Satz aus der Theorie der Determinanten, daß das Aggregat der Producte aus den Elementen einer Reihe mit den Subdeterminanten der Elemente einer parallelen Reihe verschwindet, liefert angewandt auf die Relationen in (17.) die Gleichungen (16.), womit unsere frühere Behauptung gerechtfertigt ist. In analoger Weise lassen sich aus den Gleichungen (15.) und (16.) die Gleichungen (12.) und (14.) ableiten. Eine lineare Substitution (10.) von der Art, daß zwischen den Coefficienten derselben die sechs Gleichungen (12.) und (14.), und infolge dessen die Gleichungen (15.) und (16.) bestehen, oder umgekehrt die Gleichungen (15.) und (16.) und infolge dessen die Gleichungen (12.) und (14.) stattfinden, nennt man eine orthogonale Substitution.

Geometrisch gedeutet transformiert dieselbe die Coordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems in die Coordinaten eines neuen abermals rechtwinkligen Systems. Denn da nach der Bedeutung dieser Constanten (11.)

$$\begin{aligned} \cos(xy) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \\ \cos(xz) &= a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0 \\ \cos(yz) &= b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \\ \cos(XY) &= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \\ \cos(XZ) &= a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0 \\ \cos(YZ) &= a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0, \end{aligned}$$

so ist

$$\sphericalangle xy = \sphericalangle xz = \sphericalangle yz = \sphericalangle XY = \sphericalangle XZ = \sphericalangle YZ = 90^\circ.$$

Die Gleichungen (17.) vereinfachen sich, wenn wir darin den Wert der Determinante Δ substituieren. Bilden wir

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

so ergibt sich nach dem Multiplicationstheoreme der Determinanten

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix},$$

somit wegen (12.) und (14.)

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

die Determinante Δ ist hiernach entweder $+1$ oder -1 .

Zu demselben Ergebnisse gelangen wir durch die Überlegung, daß der absolute Wert von

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

den sechsfachen Inhalt der Pyramide darstellt, deren eine Ecke 0 im gemeinsamen Coordinatenursprunge liegt, und deren andere Ecken a, b, c in dem Coordinatensysteme XYZ bezüglich die Coordinaten besitzen

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3, \end{matrix}$$

also eines Tetraeders, dessen Spitze im Ursprunge sich befindet und dessen andere Ecken auf den positiven Axen des Systems xyz im Abstände 1 vom Coordinatenanfangspunkte liegen. Da der sechsfache Inhalt dieses Tetraeders sonach 1 ist, so hat die Determinante Δ entweder den Wert $+1$ oder -1 .

Um die geometrische Bedeutung des doppelten Vorzeichens der Determinante Δ zu ermitteln, denken wir uns das obige Tetraeder durch einen Schnitt parallel der (XY) -Ebene des Systems XYZ in ein anderes verwandelt. Die Ecken dieses neuen Tetraeders, sowie deren Coordinaten wollen wir mit demselben, aber grossen Buchstaben bezeichnen, wie die auf derselben Axe des Systems xyz gelegene

Ecke des ursprünglichen Tetraeders und ihre Coordinaten. Da nun die Grundebene dieses Tetraeders der (XY) -Ebene parallel ist, so ist

$$A_3 = B_3 = C_3,$$

und das Tetraeder

$$T = \frac{1}{3} A_3 \triangle ABC.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} 2 \triangle ABC &= \pm \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & 1 \\ B_1 & B_2 & 1 \\ C_1 & C_2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \pm [(A_1 B_2 - A_2 B_1) + (A_2 C_1 - A_1 C_2) + (B_1 C_2 - B_2 C_1)], \end{aligned}$$

wo bekanntlich das $+$ oder $-$ Zeichen zu nehmen, je nachdem der Umlauf ABC mit der Drehrichtung, welche die positive Seite der X -Axe auf dem kürzesten Wege in die Lage der positiven Y -Axe überführt, übereinstimmt oder nicht. Durch Substitution dieses Wertes erhalten wir

$$T = \pm \frac{1}{6} [A_1 B_2 - A_2 B_1) C_3 + (A_2 C_1 - A_1 C_2) B_3 + (B_1 C_2 - B_2 C_1) A_3].$$

Hierin ist das obere Zeichen zu nehmen, wenn entweder $A_3 = B_3 = C_3$ positiv ist und der Umlauf ABC mit der kürzesten Drehrichtung aus der positiven Seite der X - in die positive Seite der Y -Axe übereinstimmt, oder wenn $A_3 = B_3 = C_3$ negativ ist und der Umlauf ABC dieser Drehrichtung entgegengesetzt ist; in jedem der beiden anderen möglichen Fälle ist in der Formel das untere $-$ Zeichen anzuwenden.

Bezeichnen wir nun die Abstände der Punkte A, B, C im Systeme xyz von 0 bezüglich mit A, B, C , so ist der Inhalt des rechtwinkligen Tetraeders $0 ABC = \frac{1}{6} A B C$, und da $0 A B C = 0 a b c$, so besitzt ABC den Wert 1. Da ferner

$$A_1 = A a_1; \quad A_2 = A a_2; \quad A_3 = A a_3$$

$$B_1 = B b_1; \quad B_2 = B b_2; \quad B_3 = B b_3$$

$$C_1 = C c_1; \quad C_2 = C c_2; \quad C_3 = C c_3,$$

so verwandelt sich die obige Formel für T in

$$6 T = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, = \pm \triangle,$$

wo das Zeichen gemäß den früheren Bestimmungen genommen werden muß. Es ist also hierin das positive Zeichen zu nehmen, wenn die Ebene ABC die positive Hälfte der Z -Axe schneidet und der Umlauf ABC mit der Drehrichtung übereinstimmt, welche die positive Seite der X - auf dem kürzesten Wege in die positive Hälfte der

Y -Axe überführt, oder wenn der Umlauf ABC dieser Drehrichtung entgegengesetzt ist und die Ebene ABC die negative Hälfte der Z -Axe schneidet; in den beiden übrigen Fällen ist in der obigen Formel das $-$ Zeichen zu nehmen. Δ ist also in den beiden ersten Fällen $+1$ und in den beiden anderen -1 .

Denken wir uns nun um O eine Kugel mit dem Radius 1 gezeichnet, so bestimmen die x -, y - und z -Axe auf derselben das Dreieck abc ; der Durchschnittspunkt derselben mit der positiven Seite der X -, Y - und Z -Axe sei bezüglich $\alpha\beta\gamma$. Vom Mittelpunkte der Kugel aus stimmt nun die Richtung des Umlaufes abc mit jener des Umlaufes ABC überein, und da diese in den beiden ersten Fällen mit der Richtung des Umlaufes $\alpha\beta\gamma$ übereinstimmt, so ist dies auch mit jener der Fall. Es kann daher das $\triangle abc$ mit dem congruenten $\alpha\beta\gamma$ derart durch Verschiebung auf der Kugeloberfläche zur Deckung gebracht werden, daß a mit α , b mit β und c mit γ zusammenfällt. In den beiden anderen Fällen sind die Richtungen abc und $\alpha\beta\gamma$ entgegengesetzt und werden daher zwei Paare der homologen Ecken: a, α ; b, β ; c, γ auf einander gelegt, so liegen die dritten Ecken der beiden Dreiecke symmetrisch zu ihrer gemeinsamen Grundlinie.

Wir gelangen somit zu folgendem Ergebnisse:

Ist die Substitutionsdeterminante Δ gleich der positiven Einheit, so können die beiden concentrischen Coordinatensysteme derart zur Deckung gebracht werden, daß die positiven Hälften ihrer gleichnamigen Coordinatenachsen zusammenfallen.

Ist hingegen Δ gleich der negativen Einheit, so werden, wenn die positiven Hälften zweier Paare gleichnamiger Coordinatenachsen zusammenfallen, die *entgegengesetzten* Seiten des dritten Paares einander decken.

Je nachdem $\Delta = +1$ oder -1 ist, gehen die Formeln (18.) über in:

$$\begin{aligned} a_1 &= \pm (b_2 c_3 - c_2 b_3); & a_2 &= \pm (b_1 c_3 - c_1 b_3); & a_3 &= \pm (b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ b_1 &= \pm (a_2 c_3 - c_2 a_3); & b_2 &= \pm (a_1 c_3 - c_1 a_3); & b_3 &= \pm (a_1 c_2 - a_2 c_1) \\ c_1 &= \pm (a_2 b_3 - a_3 b_2); & c_2 &= \pm (a_1 b_3 - a_3 b_1); & c_3 &= \pm (a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned}$$

II) Der Zusammenhang zwischen den Ebenencoordinaten der beiden rechtwinkligen Systeme ergibt sich aus

$$UX + VY + WZ + 1 \equiv ux + vy + wz + 1,$$

wo also U, V, W die Coordinaten einer Ebene im Systeme XYZ bedeuten und u, v, w die Coordinaten derselben Ebene für das System x, y, z sind. Durch Substitution der Werte in (10.) erhalten wir hieraus die Transformationsformeln

$$u = a_1 U + a_2 V + a_3 W$$

$$v = b_1 U + b_2 V + b_3 W$$

$$w = c_1 U + c_2 V + c_3 W.$$

Vermöge der Formeln (17.) finden wir heraus:

$$U = a_1 u + b_1 v + c_1 w$$

$$V = a_2 u + b_2 v + c_2 w$$

$$W = a_3 u + b_3 v + c_3 w.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar mit Rücksicht auf (12.) und (14.), oder (15.) und (16.)

$$U^2 + V^2 + W^2 \equiv u^2 + v^2 + w^2,$$

während sich aus (10.) die selbstverständliche Identität ergibt:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2,$$

von welcher ausgehend wir umgekehrt die Formeln zur Transformation der Coordinaten zweier rechtwinkligen Systeme ableiten können.

§ 93.

Ü b u n g e n.

1) Sind zwei Paare collinearer Strahlenbündel gegeben: $S_1 \wedge S_1'$ und $S_2 \wedge S_2'$, so können vermöge derselben die Geraden des Raumes einander dadurch eindeutig zugeordnet werden, daß jeder Geraden als dem Durchschnitte zweier Ebenen eines der Bündelpaare die Durchschnittslinie der entsprechenden Ebenen der collinearen Bündel als entsprechende Gerade zugewiesen wird. Welches Gebilde entspricht nun einer Ebene oder einem Punkte des einen räumlichen Systems im anderen? Bei welcher Lage der Bündel geht diese Verwandtschaft in die Collineation über?

Anl. Unter dem Gebilde, welches einer Ebene des einen Systems im anderen entspricht, wird das Gebilde verstanden, welches von den Geraden constituirt wird, die den Strahlen des ebenen Systems zugeordnet sind.

Diese Geraden sind offenbar die Secanten einer Raumcurve der dritten Ordnung. Jedem Punkte, als dem Träger eines Strahlenbündels, entspricht im anderen Systeme im Allgemeinen eine lineare Congruenz. Auf jeder Geraden existieren jedoch zwei Punkte, für deren jeden die zugehörige Congruenz in einen Bündel degeneriert. In jeder Ebene bilden diese Punkte einen Kegelschnitt. Welche Fläche constituieren diese sämtlichen Punkte in jedem der beiden räumlichen Systeme? Was entspricht einem ebenen Strahlenbüschel oder einem Ebenenbüschel?

2) Die analogen Untersuchungen durchzuführen mittelst zweier Paare collinearer ebener Systeme oder mittelst zweier Strahlenbündel, deren jedem ein reciprokes ebenes System zugeordnet ist. Unter welchen Bedingungen sind im letzteren Falle die beiden räumlichen Systeme reciprok?

3) Aus fünf Paaren entsprechender Punkte, von denen keine drei in einer Geraden und keine vier in einer Ebene liegen, oder entsprechender Ebenen, von denen keine drei in derselben Geraden und keine vier in demselben Punkte sich schneiden, die beiden durch sie bestimmten collinearen Systeme herzustellen.

Anl. Nach (1.) und (2.), indem man im ersten Falle aus den fünf Paaren gegebener entsprechender Punkte zwei Paare collinearer Strahlenbündel und im zweiten aus den fünf Paaren entsprechender Ebenen zwei Paare collineare ebene Systeme construirt, dergestalt, daß stets dem gemeinsamen Strahle des einen Paares von Grundgebilden der gemeinsame Strahl der collinearen Grundgebilde entspricht.

4) Aus fünf Punkten, von denen keine drei in einer Geraden und keine vier in einer Ebene liegen, und den entsprechenden Ebenen die beiden durch sie bestimmten reciproken Systeme zu construieren.

Anl. Nach (2.).

5) Zwei geradlinige oder zwei nicht geradlinige Flächen der zweiten Ordnung können stets als collineare Gebilde betrachtet werden.

Anl. Aus (3.) und (4.) § 64.

6) Unter der Voraussetzung eines Parallel-Coordinatensystems die Gleichungen zweier collinearer Systeme zu untersuchen.

Anl. Sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes des einen, und ξ, η, ζ die des entsprechenden Punktes im anderen Systeme, so hängen dieselben durch drei Gleichungen von der Form von einander ab:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta + a_{14}}{a_{41}\xi + a_{42}\eta + a_{43}\zeta + a_{44}} \\ y &= \frac{a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta + a_{24}}{a_{41}\xi + a_{42}\eta + a_{43}\zeta + a_{44}} \\ z &= \frac{a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta + a_{34}}{a_{41}\xi + a_{42}\eta + a_{43}\zeta + a_{44}}, \end{aligned}$$

welche drei Gleichungen mittelst eines Proportionalitätsfactors durch vier ersetzt werden können.

Hieraus ergibt sich, daß die Coordinaten u, v, w einer Ebene des ersten Systems mit denen der entsprechenden Ebene u', v', w' durch die Gleichungen zusammenhängen:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{a_{11}u + a_{21}v + a_{31}w + a_{41}}{a_{14}u + a_{24}v + a_{34}w + a_{44}} \\ v' &= \frac{a_{12}u + a_{22}v + a_{32}w + a_{42}}{a_{14}u + a_{24}v + a_{34}w + a_{44}} \\ w' &= \frac{a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w + a_{43}}{a_{14}u + a_{24}v + a_{34}w + a_{44}}; \end{aligned}$$

die Doppelpunkte werden durch die Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \varrho)x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} &= 0 \\ a_{21}x + (a_{22} - \varrho)y + a_{23}z + a_{24} &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - \varrho)z + a_{34} &= 0 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + (a_{44} - \varrho) &= 0, \end{aligned}$$

wo ϱ eine Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Jede Wurzel derselben bestimmt auch eine Doppelebene, deren Coordinaten gegeben sind durch

$$\begin{aligned} (a_{11} - \varrho)u + a_{21}v + a_{31}w + a_{41} &= 0 \\ a_{12}u + (a_{22} - \varrho)v + a_{32}w + a_{42} &= 0 \\ a_{13}u + a_{23}v + (a_{33} - \varrho)w + a_{43} &= 0 \\ a_{14}u + a_{24}v + a_{34}w + (a_{44} - \varrho) &= 0. \end{aligned}$$

7) Die Bedingungen zu ermitteln, unter welchen die Systeme in (6.) affin sind, und zu zeigen, daß in zwei affinen Systemen

1. das Verhältniß des Inhaltes irgend eines Gebildes zu dem seines entsprechenden constant ist;
2. je zwei entsprechende Punctreihen ähnlich sind, d. h. daß das Verhältniß entsprechender Strecken auf denselben constant ist.

Anl. Die affine Verwandtschaft erscheint durch Gleichungen von der Form definiert:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta + a_{14} \\ y &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta + a_{24} \\ z &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta + a_{34}, \end{aligned}$$

woraus sich unmittelbar (1.) ergibt.

(2.) folgt aus:

$$\begin{aligned} (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 &= [a_{11}(\xi - \xi') + a_{12}(\eta - \eta') + a_{13}(\zeta - \zeta')]^2 \\ &\quad + [a_{21}(\xi - \xi') + a_{22}(\eta - \eta') + a_{23}(\zeta - \zeta')]^2 \\ &\quad + [a_{31}(\xi - \xi') + a_{32}(\eta - \eta') + a_{33}(\zeta - \zeta')]^2, \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2} &= \frac{\left[a_{11} \frac{\xi - \xi'}{\xi - \xi'} + a_{12} \frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'} + a_{13} \right]^2}{1 + \left(\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'} \right)^2 + \left(\frac{\zeta - \zeta'}{\xi - \xi'} \right)^2} \\ &\quad + \frac{\left[a_{21} \frac{\xi - \xi'}{\xi - \xi'} + a_{22} \frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'} + a_{23} \right]^2}{1 + \left(\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'} \right)^2 + \left(\frac{\zeta - \zeta'}{\xi - \xi'} \right)^2} \\ &\quad + \frac{\left[a_{31} \frac{\xi - \xi'}{\xi - \xi'} + a_{32} \frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'} + a_{33} \right]^2}{1 + \left(\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'} \right)^2 + \left(\frac{\zeta - \zeta'}{\xi - \xi'} \right)^2}, \end{aligned}$$

da $\frac{\xi - \xi'}{\xi - \xi'}$ und $\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}$ für dieselbe Gerade constante Größen sind.

Soll das Verhältniß je zweier entsprechender Strecken constant = k sein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= k^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0 \\
a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= k^2 & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0 \\
a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= k^2 & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0,
\end{aligned}$$

woraus sich, wie in § 92, Relationen zwischen den a aufstellen lassen. Zwei derartige Systeme, in denen das Verhältniß entsprechender Strecken constant ist, werden ähnlich genannt. Die Gleichung

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^2 = k^6$$

ergiebt für Δ zwei Werte: $+k^3$ und $-k^3$, denen zwei geometrisch verschiedene Arten ähnlicher Systeme entsprechen.

Ist $k = 1$, so werden die beiden Systeme gleich genannt, und zwar die Systeme, in denen $\Delta = +1$ congruent, und die, für welche $\Delta = -1$ ist, symmetrisch.

Es sind die Doppelemente ähnlicher und gleicher Systeme aufzusuchen und die geometrischen Eigentümlichkeiten der beiden Arten ähnlicher und gleicher Systeme zu erörtern.

8) Können zwei collineare räumliche Systeme stets in perspectivische Lage gebracht werden?

Anl. Die beiden Systeme müssen, wenn sie in perspectivische Lage sollen gebracht werden können, zwei entsprechende congruente ebene Systeme besitzen, deren jedes, wie die perspectivische Lage unmittelbar zeigt, zur Gegenebene seines räumlichen Systems parallel ist.

Es seien nun $x = \frac{A_1}{A_4}$, $y = \frac{A_2}{A_4}$, $z = \frac{A_3}{A_4}$ die Collineationsgleichungen, so muß die Gleichung des fraglichen ebenen Systems die Form besitzen: $A_4 = k$, wo k eine zu eruiende Constante bedeutet. Für einen zweiten Punct unseres ebenen Systems x' , y' , z' bestehen die Gleichungen

$$x' = \frac{A_1'}{k}, \quad y' = \frac{A_2'}{k}, \quad z' = \frac{A_3'}{k},$$

wenn A' das Resultat der Substitution der Coordinaten x' , y' , z' des entsprechenden Punctes in A bezeichnet. Somit ist

$$\begin{aligned}
k^2[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2] &= [a_{11}(\xi - \xi') + a_{12}(\eta - \eta') + a_{13}(\zeta - \zeta')]^2 \\
&+ [a_{21}(\xi - \xi') + a_{22}(\eta - \eta') + a_{23}(\zeta - \zeta')]^2 \\
&+ [a_{31}(\xi - \xi') + a_{32}(\eta - \eta') + a_{33}(\zeta - \zeta')]^2.
\end{aligned}$$

Bezeichnet nun ϱ die Entfernung der Puncte ξ , η , ζ und ξ' , η' , ζ' , und sind α , β , γ die Winkel, welche ihre Verbindungslinie bezüglich mit der X-, Y- und Z-Axe bilden, so ist

$$\begin{aligned}
k^2 &= [a_{11} \cos \alpha + a_{12} \cos \beta + a_{13} \cos \gamma]^2 \\
&+ [a_{21} \cos \alpha + a_{22} \cos \beta + a_{23} \cos \gamma]^2 \\
&+ [a_{31} \cos \alpha + a_{32} \cos \beta + a_{33} \cos \gamma]^2.
\end{aligned}$$

Zwischen den goniometrischen Functionen der Winkel besteht jedoch nicht eine ausreichende Anzahl Gleichungen, um das k unabhängig von denselben darstellen zu können, denn es finden zwischen ihnen nur zwei Relationen statt:

$$a_{41} \cos \alpha + a_{42} \cos \beta + a_{43} \cos \gamma = 0$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Die Elimination zweier der Größen $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ aus der Gleichung für k^2 ergibt nun die Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten a , unter welchen die beiden collinearen Systeme in perspectivische Lage gebracht werden können.

9) Die Schnittpunkte der Verbindungslinie zweier Punkte mit einer Fläche der zweiten Ordnung aufzufinden.

Anl. § 10 oder 38.

10) Den geometrischen Ort der Punkte zu bestimmen, welche von einem gegebenen Punkte durch eine Fläche der zweiten Ordnung nach einem gegebenen Doppelverhältnisse getrennt werden.

Anl. Aus 9. indem einer der beiden Punkte als der gegebene, und der andere als einer der gesuchten betrachtet wird, und § 45.

Die Fläche der zweiten Ordnung, welche sich als der gesuchte geometrische Ort ergibt, geht in eine Doppelebene über, sobald das Doppelverhältnis ein harmonisches sein soll: in die Polarebene des gegebenen Punktes. Liegt dieser Punkt auf der Fläche selbst, so wird diese von jeder Geraden, welche von ihm aus in der Polarebene gezogen wird, in zwei zusammenfallenden Punkten (9.) geschnitten, also berührt.

11) Unter der Voraussetzung, daß die Gleichung der Fläche in Cartesischen Coordinaten gegeben sei, die Coordinaten des Mittelpunktes und der einem Durchmesser conjugierten Durchmesserebene, und die Axen derselben zu finden.

Anl. § 88. Die Gleichung der Fläche in Cartesischen Coordinaten wird aus $\sum a_{ik} x_i x_k$ erhalten, indem darin eine der homogenen Coordinaten, etwa $x_4 = 1$ gesetzt wird. Da nach (10.) die Coordinaten der Polarebene einer Fläche zweiter Ordnung mit denen ihres Poles durch die Gleichungen zusammenhängen:

$$u = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}$$

$$v = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}$$

$$w = \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}},$$

so besitzt die Durchmesserebene, welche der Richtung conjugiert, die mit der X-, Y- und Z-Achse des rechtwinkligen Coordinatensystems bezüglich die Winkel λ , μ , ν einschließt, die Coordinaten:

$$u = \frac{a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma}{a_{41}\alpha + a_{42}\beta + a_{43}\gamma}$$

$$v = \frac{a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma}{a_{41}\alpha + a_{42}\beta + a_{43}\gamma}$$

$$w = \frac{a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma}{a_{41}\alpha + a_{42}\beta + a_{43}\gamma},$$

wo $\alpha = \cos \lambda$, $\beta = \cos \mu$, $\gamma = \cos \nu$ gesetzt wurde. Die Richtung des Durchmessers steht senkrecht auf der conjugierten Ebene, wenn

$$\frac{a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma}{\alpha} = \frac{a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma}{\beta} \\ = \frac{a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma}{\gamma}.$$

Setzt man den Wert dieser Verhältnisse gleich ϱ , so ist derselbe durch die Gleichung bestimmt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

welche § 74, 18 drei reelle Wurzeln besitzt. Welcher Art sind die Flächen der zweiten Ordnung, für welche in der vorstehenden Gleichung für einen Wurzelwert die Subdeterminanten zweiten Grades verschwinden?

12) Den Mittelpunkt und die Axen einer Fläche der zweiten Ordnung durch Coordinatentransformation aufzufinden.

Anl. Es werden zunächst durch Verschiebung des Coordinatensystems die Coefficienten von x , y und z zu Null gemacht und hierauf durch Drehung um den Anfangspunct des neuen Systems, den Mittelpunkt der Fläche, die Coefficienten von xy , xz und yz zum Verschwinden gebracht.

13) Das Polarsystem einer Kugel darzustellen.

Anl. Aus den diesbezüglichen Gleichungen folgt unmittelbar, daß die Verbindungslinie des Mittelpunctes der Kugel mit irgend einem Punkte senkrecht steht auf der Polarebene des Punctes. Hieraus folgt unmittelbar, daß alle Kugeln in der unendlich fernen Ebene dasselbe Polarsystem gemeinsam besitzen, oder, was dasselbe besagt, die unendlich ferne Ebene in demselben imaginären Kreise schneiden. Er wird der unendlich ferne Kugelkreis genannt. Und offenbar umgekehrt: Jede Fläche der zweiten Ordnung, welche durch den unendlich fernen Kugelkreis geht, ist eine Kugel, denn es steht dann jeder Durchmesser auf seiner conjugierten Ebene senkrecht.

14) Durch eine Fläche der zweiten Ordnung wird in jeder Ebene ein Polarsystem induciert; wie oft ist dasselbe ein Kreissystem, d. h. ist seine Ordnungscurve ein Kreis?

Anl. Der Richtung, welche in der Ebene mit den Coordinaten m , n , p liegt und mit der X - Y - und Z -Achse Winkel einschließt, deren Cosinus bezüglich α , β , γ sind, ist eine Durchmesserenebene conjugiert, welche die Coordinaten besitzt:

$$u = \frac{a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma}{a_{41}\alpha + a_{42}\beta + a_{43}\gamma} \\ v = \frac{a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma}{a_{41}\alpha + a_{42}\beta + a_{43}\gamma} \\ w = \frac{a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma}{a_{41}\alpha + a_{42}\beta + a_{43}\gamma},$$

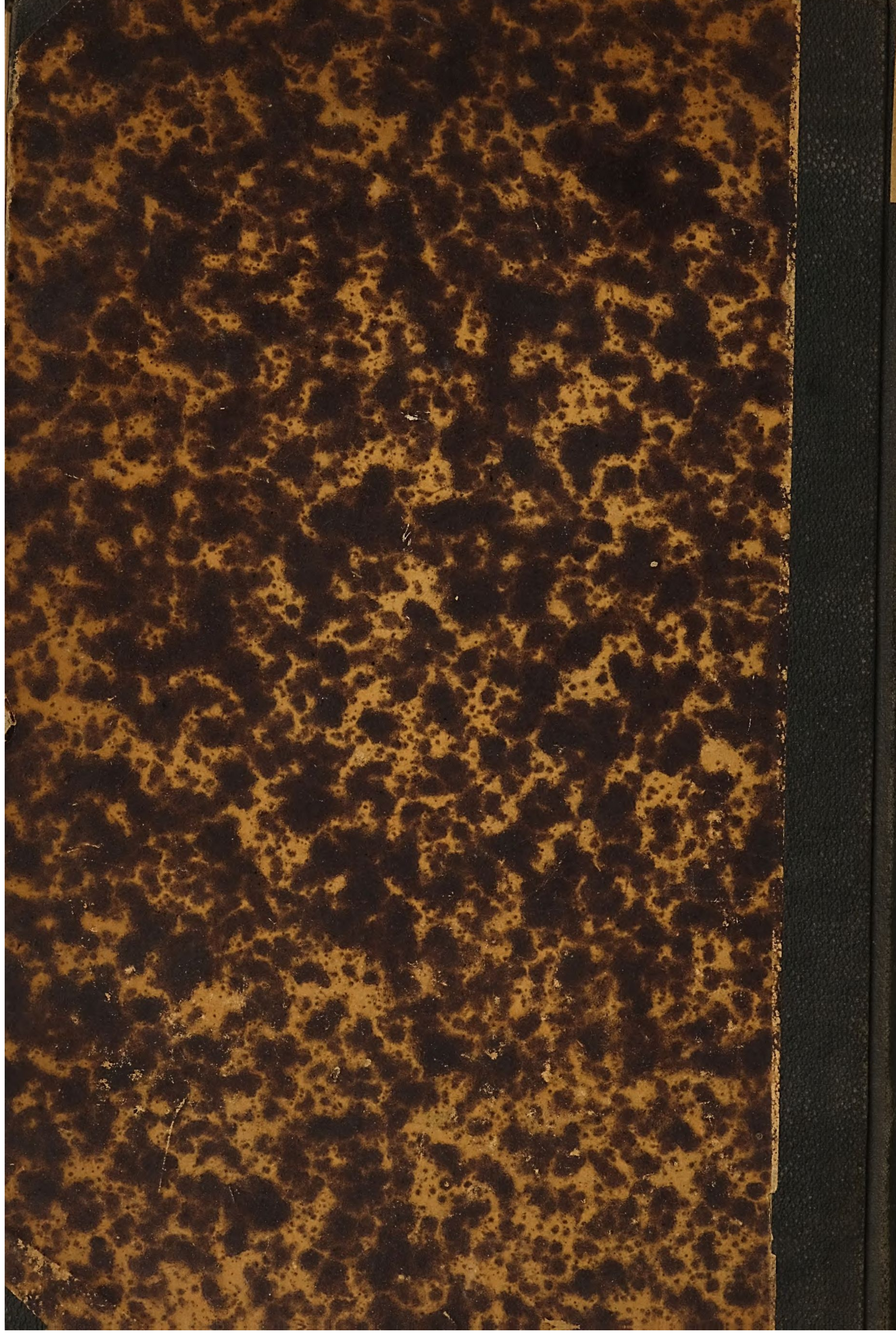
während α , β und γ durch die Gleichung verbunden sind :

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0.$$

Aus der Bedingung, daß die Richtung α , β , γ auf der Durchschnittslinie der Ebenen u , v , w und m , n , p senkrecht stehen soll für alle Werte von α , β und γ , welche dieser Gleichung genügen, ergeben sich Bestimmungsgleichungen für m , n und p .

- General-Register** der Zeitschrift für Mathematik und Physik 1856—1880. Jahrg. I—XXV. [123 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.60
- Harnack, Dr. Axel**, o. Professor der Mathematik an dem Polytechnikum zu Dresden, die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Zur Einführung in das Studium dargestellt. Mit Figuren im Text. [VIII u. 409 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 7.60.
- Helmert, Dr. F. R.**, Professor an der technischen Hochschule zu Aachen, die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie. Einleitung u. I. Theil: Die mathematischen Theorieen. Mit vielen Figuren im Text. [XV u. 631 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 18.—
- Henrici, J.**, Professor am Gymnasium zu Heidelberg, und P. TREUTLEIN, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Erster Teil: Gleichheit der planimetrischen Größen. Kongruente Abbildung in der Ebene. Pensum der Tertia. Mit 188 Figuren im Holzschnitt. [VIII u. 152 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.—
- Herwig, Dr. Hermann**, Professor an der technischen Hochschule zu Darmstadt, physikalische Begriffe und absolute Maasse. [VIII und 89 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.40.
- Joachimsthal, F.**, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Zweite Auflage, bearbeitet von L. NATANI. Mit zahlreichen Figuren im Text. [VIII u. 242 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 6.—
- Jordan, Dr. W.**, Prof. am Grossh. Polytechnikum zu Karlsruhe, Kreis-Coordinationen für 200 Radien. [48 S.] 16. In Leinwand kart. n. *M.* 1.20.
- Klempt, Diedr. Aug.**, Realschullehrer in Rostock, Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra. Mit einigen Hundert Beispielen. [XII u. 260 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 4.—
- Königsberger, Leo**, zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—1829. [104 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.—
- Lagrange's** mathematische Elementarvorlesungen. Deutsche Separatausgabe von Dr. H. NIEDERMÜLLER, Oberlehrer am Nicolaigymnasium zu Leipzig. [IV u. 116 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.40.
- Mayer, Ernst**, Professor an der K. K. Marineakademie in Fiume, über Küstenaufnahmen. Ein Beitrag zu den Lehr- und Handbüchern der Geodäsie. Mit Holzschnitten im Text und vier Tafeln. [60.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.40.
- Milinowski, A.**, Oberlehrer am Gymnasium zu Weissenburg i. E., die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. I. Theil: Planimetrie. Mit Holzschnitten im Text und 4 Figurentafeln. [VII u. 123 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.—

- Neumann, Dr. F.**, Professor der Physik und Mineralogie an der Universität zu Königsberg, Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induktion. [VIII u. 116 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.60.
- Saalschütz, Prof. Dr. Louis**, der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft. Auf Grundlage des strengen Ausdrucks für den Krümmungsradius. Mit Holzschn. im Text u. 3 lithograph. Tafeln. [XXXI u. 247 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 9. —
- Salmon, George**, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. WILHELM FIEDLER, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. II. Theil: Analytische Geometrie der Curven im Raume, der Strahlensysteme und der algebraischen Flächen. Dritte verb. Aufl. Mit Holzschn. im Text. [LXXII u. 686 S. u. Nachträge 8 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 16. —
- Schell, Dr. Wilhelm**, Geh. Hofrath und Professor am Polytechnikum zu Karlsruhe, Theorie der Bewegung und der Kräfte, ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik mit besonderer Rücksicht auf das Bedürfniss technischer Hochschulen bearbeitet. Zweite umgearbeitete Auflage. II. Band. 3. Theorie der Kräfte und ihrer Aequivalenz (Dynamik im weiteren Sinne einschl. Statik). 4. Theorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung (Kinetik oder Dynamik im engeren Sinne). Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. [XII u. 618 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 10. —
- Schottky, Dr. F.**, Privatdocent an der Universität Breslau, Abriss einer Theorie der Abel'schen Funktionen von drei Variablen. [162 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 4. —
- Schröter, Dr. Heinrich**, Professor der Mathematik a. d. Universität zu Breslau, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde. Nach JACOB STEINER's Principien auf synthetischem Wege abgeleitet. [XV u. 720 S. mit vielen Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. *M.* 16. —
- Tait, P. G.**, Prof. der Physik a. d. Universität in Edinburg, elementares Handbuch der Quaternionen. Autoris. Uebersetzung von Dr. G. v. SCHERFF. [XVI u. 332 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 10. —
- Weiler, Dr. A.**, Privatdocent und Lehrer der Mathematik in Zürich, Leitfaden der mathematischen Geographie für den Unterricht an Mittelschulen, sowie zum Selbststudium. [98 S. mit Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.50.
- Behme, Dr. W.**, Direktor der höheren Gewerbeschule zu Barmen, Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst Repetitionstafeln. Für Bürger-, Gewerbe- und höhere Stadtschulen, sowie zum Selbstunterrichte. Sechste verbesserte Auflage. Mit einem besonderen Heft Figurentafeln. [VI u. 106 S.] geh. n. *M.* 2.40.



Escherich, Gustav <<von>>,

Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes

Leipzig 1881

Math.p. 130 p

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650878-7